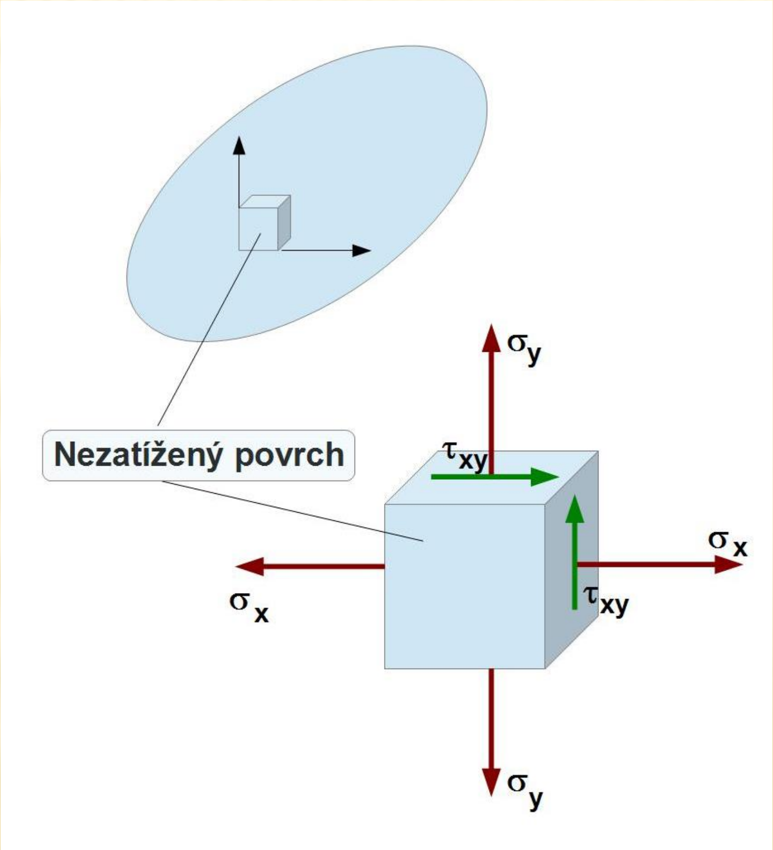
Rovinná napjatost – rovinné přetvoření

PLASTICITA

ROVINNÁ NAPJATOST

Rovinná napjatost je všude na nezatíženém povrchu těles. Jestliže osu *z* souřadného systému zvolíme ve směru normály k nezatíženému povrchu, pak budou nulové složky napětí $\sigma_z = 0, \tau_{xz} = 0, \ \tau_{yz} = 0.$ Hookeův zákon pro dvouosou napjatost:



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right),$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right),$$

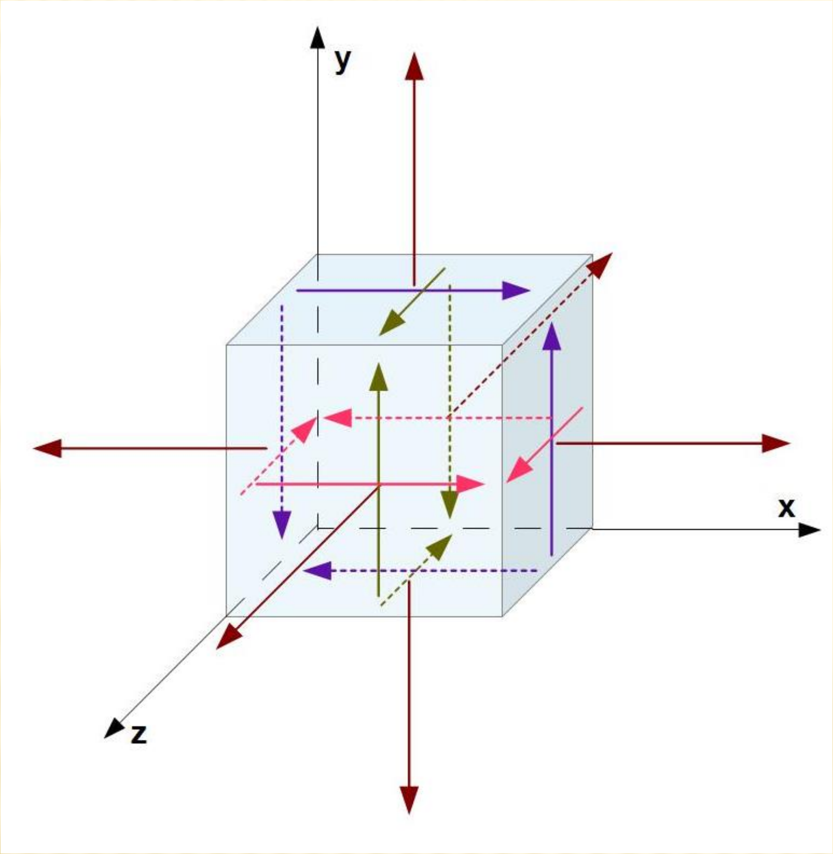
$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}.$$

$$\sigma_x = \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right),$$

$$\sigma_y = \frac{E}{\left(1-\nu^2\right)}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right),$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}.$$

DOHODA O ZNAMÉNKU

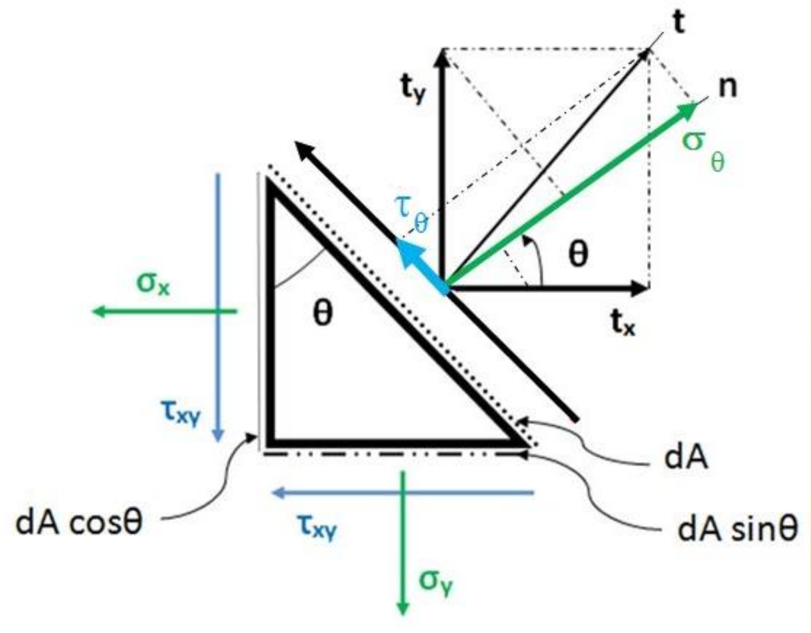


a) Kladné strany elementu na obrázku jsou ty, které jsou viditelné - jsou vzdálenější od počátku (o přírůstek dx, dy, n. dz) než strany záporné.

b) Kladné napětí je takové, které na kladné straně elementu působí v kladném smyslu osy souřad. a na záporné straně elementu v záporném smyslu osy (++ n. - -)

Tahová normálná napětí jsou kladná, talková napětí jsou záporná.
Napětí zakreslená na obrázku jsou všechna kladná.

NAPĚTÍ V NAKLONĚNÉM ŘEZU, JEHO NORMÁLA SVÍRÁ ÚHEL θ S OSOU *x*



Podmínky rovnováhy elementu do směru normály n a tečny:

$$\sigma_\theta dA = \sigma_x \cos\theta\, dA \cos\theta + \sigma_y \sin\theta\, dA \sin\theta +$$

$$+\tau_{xy} \sin\theta\, dA \cos\theta + \tau_{xy} \cos\theta\, dA \sin\theta \Rightarrow$$

$$\sigma_\theta = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + \tau_{xy} 2\sin\theta\cos\theta,$$

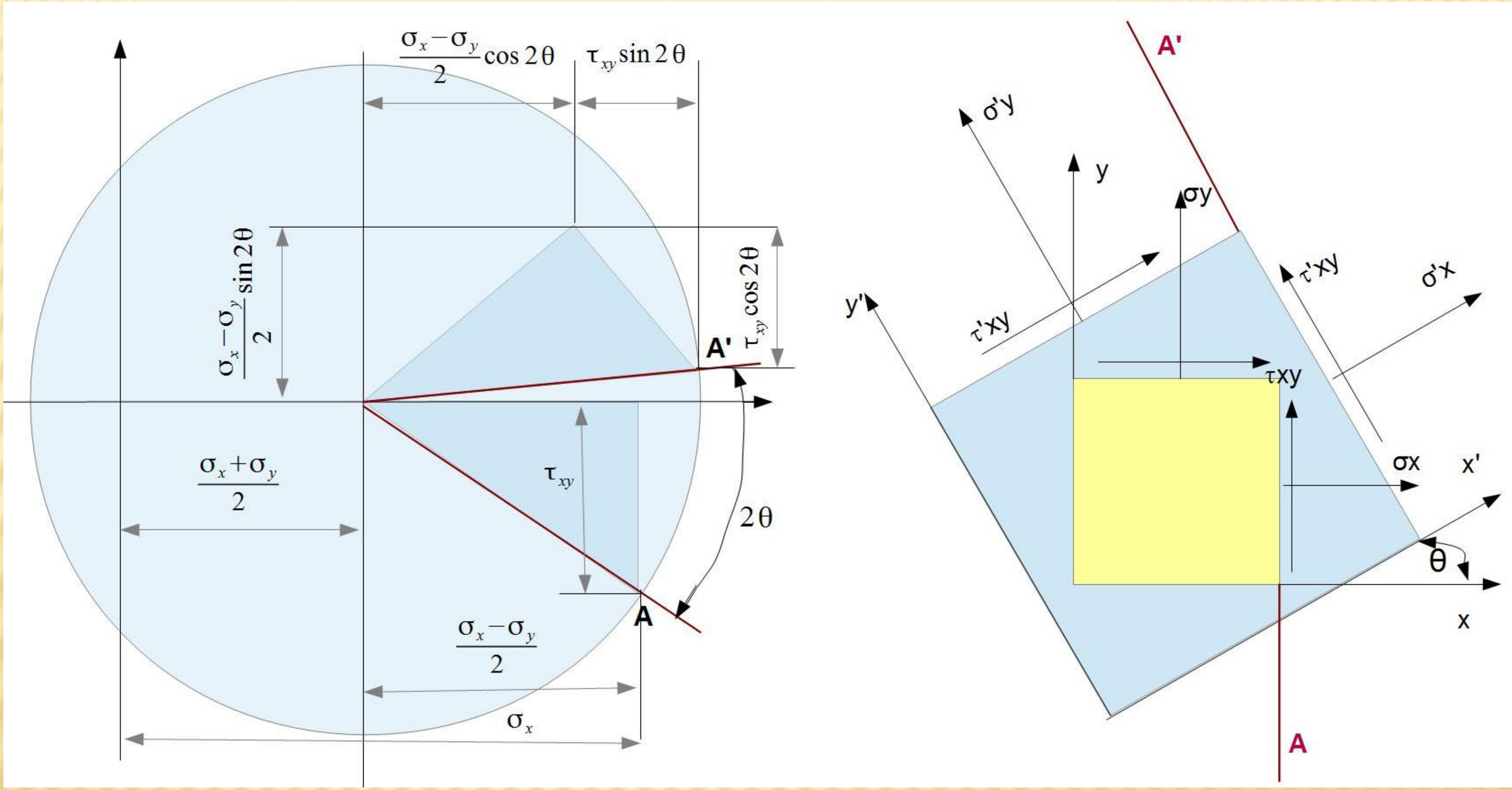
$$\tau_\theta = -\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

Transformační vztahy pro napětí můžeme upravit na parametrické rovnice kružnice v osách σ-τ , parametr je 2θ:

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta,$$

$$\tau_\theta = -\frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta.$$

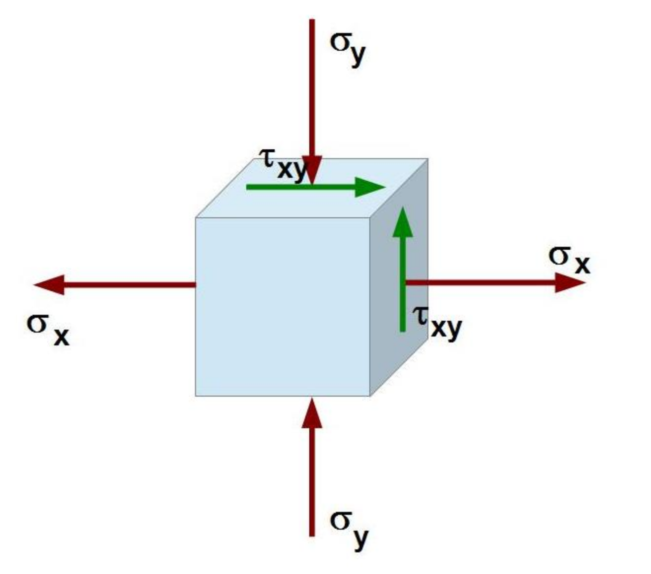
TRANSFORMACE SLOŽEK NAPĚTÍ DO POOTOČENÉHO SOUŘADNÉHO SYSTÉMU



Dohoda o znaménku smykového napětí pro Mohrovu kružnici: smykové napětí, které by otáčelo elementem ve směru hodin. ručiček, vynášíme v kladném smyslu osy τ

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta,$$

$$\tau_\theta = -\frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta.$$



PŘÍKLAD

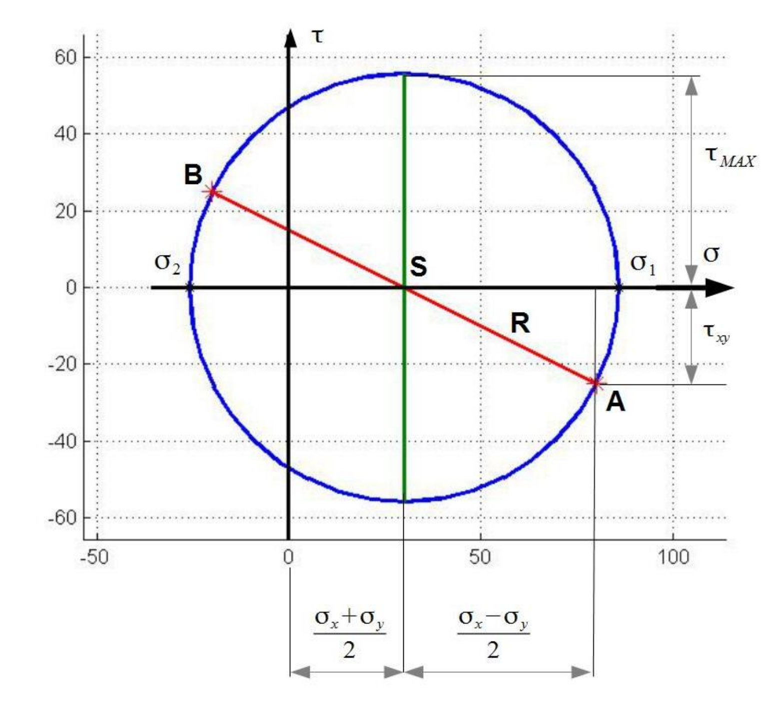
Jsou dány složky dvouosé napjatosti – viz obrázek:

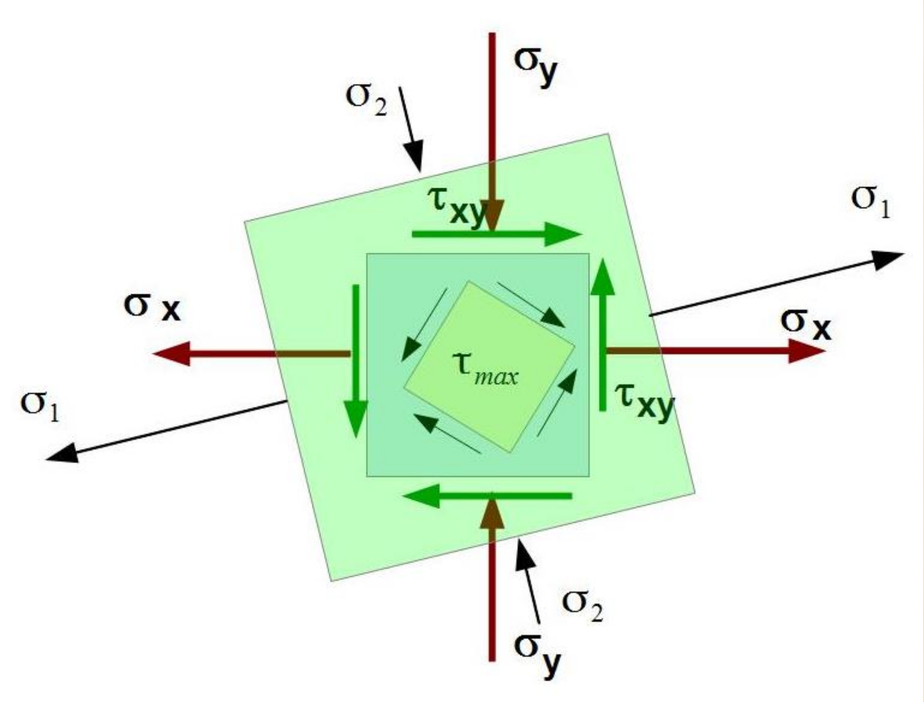
$$\sigma_x = 80\,MPa,\ \sigma_y = -20\,MPa,\ \tau_{xy} = 25\,MPa.$$

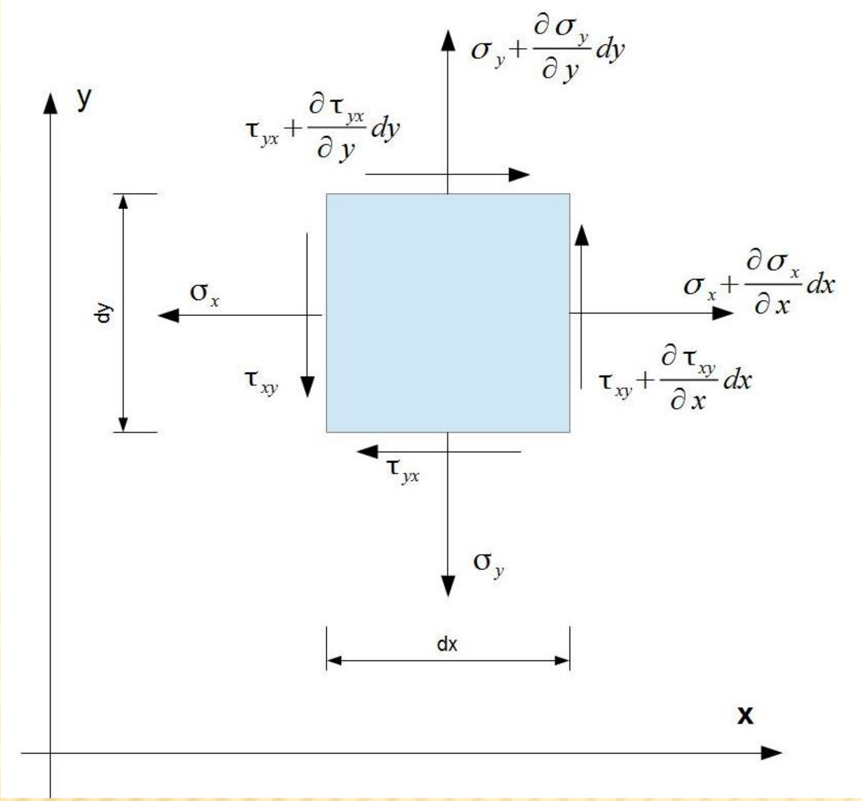
Zakresleme Mohrovu kružnici a určeme hlavní napětí, hlavní směry a maximální smykové napětí a jeho roviny.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \left[85{,}9;\ -25{,}9\right] MPa$$

$$\theta_{1,2} = \frac{1}{2} arctg \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \left[13{,}3^o;\ 103{,}3^o\right];\ \tau_{\max} = R = 55{,}9\,MPa.$$







PODMÍNKY ROVNOVÁHY

X,Y= zatěžující síly na jednotku objemu (vlastní tíže, odstředivá síla, magnetická síla apod.)

$$-\sigma_x dydz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz - \tau_{yx} dxdz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dxdz + Xdxdydz = 0,$$

$$-\tau_{xy} dydz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dydz - \sigma_y dxdz + \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dxdz + Ydxdydz = 0,$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0, \qquad \tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

TENZOR MALÝCH PŘETVOŘENÍ

Vektor posuvu:

$$u = \left(u_x, u_y, u_z\right)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y},$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x},$$

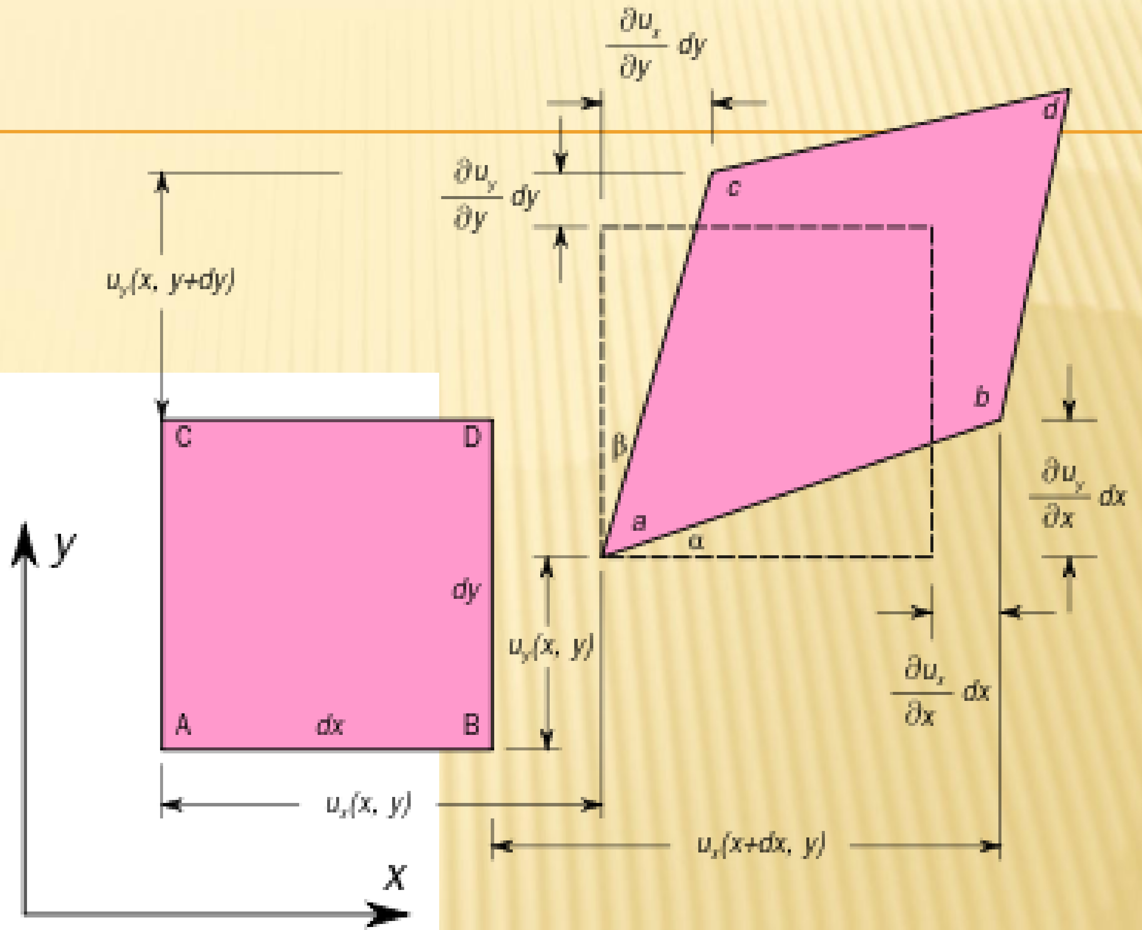
analogicky:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}.$$

Tenzor malých přetvoření:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12}/2 & \gamma_{13}/2 \\ \gamma_{21}/2 & \varepsilon_{22} & \gamma_{23}/2 \\ \gamma_{31}/2 & \gamma_{32}/2 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}.$$



ROVNICE KOMPATIBILITY

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y},$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x},$$

Ze dvou složek vektoru posuvu u_x a u_y jsme odvodili tři složky tenzoru přetvoření ε_x, ε_y a γ_{xy}. Tyto tři složky tedy nemohou být nezávislé a musí být ve vzájemném vztahu tak, aby těleso po deformaci zůstalo celistvé (aby v něm nevznikly díry, nebo aby se jeho části navzájem neprostupovaly). Tento vztah získáme vyloučením složek posuvů z kinematických vztahů:

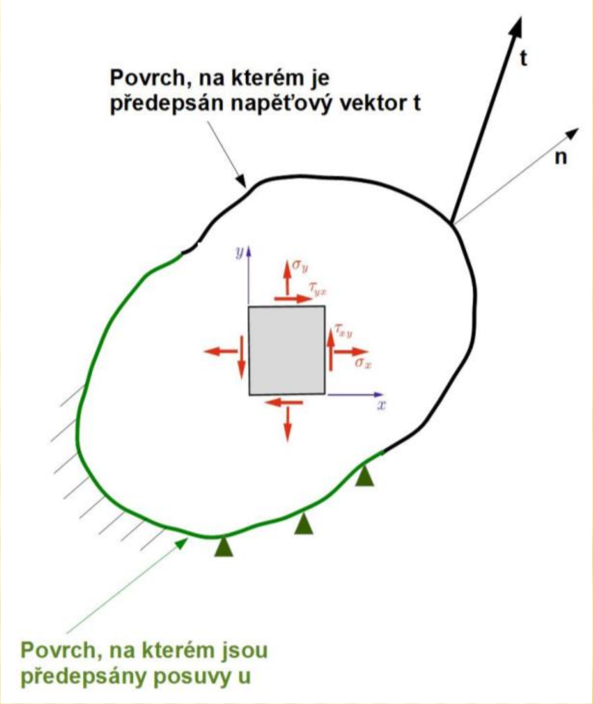
Derivujme dvakrát vztah pro γ_{xy} :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y}, \quad \text{ale } \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2},$$

analogicky pro $\dfrac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y}$, po dosazení $\Rightarrow$ *rovnice kompatibility* :

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}.$$

OKRAJOVÉ PODMÍNKY



Máme těleso, které má jeden ze svých rozměrů (ve směru osy *z* zvoleného souřadného systému) mnohem menší, než rozměry ve směru *x* a *y* (tenká deska, plech, disk apod.)

Na části okraje S_u jsou předepsány posuvy (vetknutí, podpory apod.)

Na části okraje S_t jsou předepsána napětí.