

Analýza přetvoření

PLASTICITA

JEDNOOSÉ PŘETVOŘENÍ

Seth-Hillova skupina měr přetvoření je definována jako

$$\varepsilon = \frac{1}{\kappa} (\lambda^\kappa - 1), \quad \text{kde } \lambda = \frac{L}{L_0}, \quad 0 < \lambda < \infty.$$

kde tyč je prodloužena z původní délky L_0 na konečnou délku L a λ je protažení.

Používané míry přetvoření odpovídají různým hodnotám parametru κ :

Přetvoření:

Př.: $\lambda = 1,010000$

Inženýrské ($\kappa = 1$) $\varepsilon = \lambda - 1 = \frac{L - L_0}{L_0},$

$\varepsilon = 0,010000$

Skutečné ($\kappa = -1$) $\varepsilon_{skut} = 1 - \frac{1}{\lambda} = \frac{L - L_0}{L},$

$\varepsilon_{skut} = 0,009900$

Logaritmické ($\kappa \rightarrow 0$) $\varepsilon_{log} = \ln \lambda = \ln \left(\frac{L}{L_0} \right),$

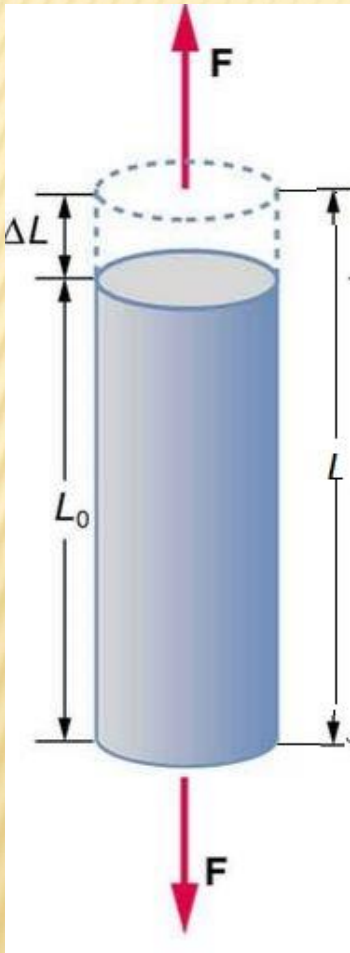
$\varepsilon_{log} = 0,009950$

Lagrangeovo ($\kappa = 2$) $\varepsilon_{Lag} = \frac{1}{2} (\lambda^2 - 1) = \frac{1}{2} \frac{L^2 - L_0^2}{L_0^2},$

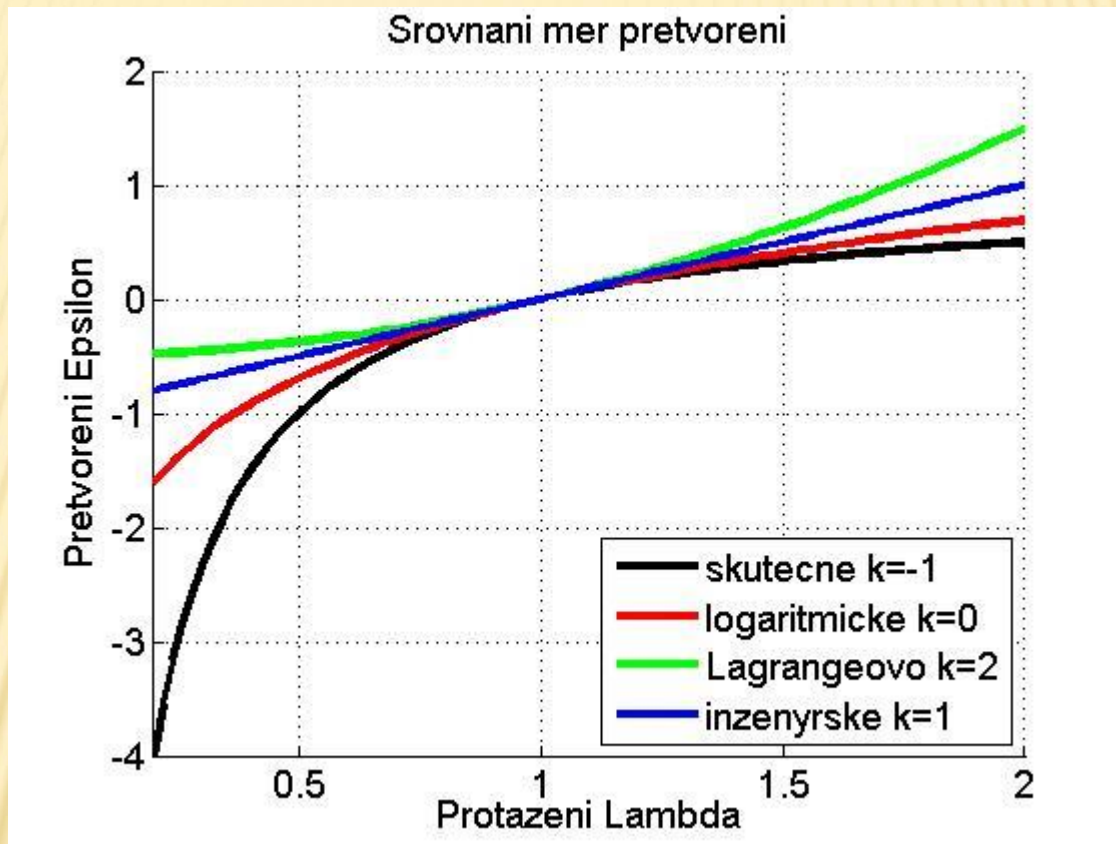
$\varepsilon_{Lag} = 0,010050$

Pro tříosou napjatost jsou Seth-Hillovy míry přetvoření: $\underline{\varepsilon} = \frac{1}{\kappa} (\underline{U}^\kappa - \underline{I})$

Kde \underline{U} je tenzor protažení získaný polárním rozkladem deformačního gradientu \underline{F}



SROVNÁNÍ JEDNOTLIVÝCH MĚR PŘETVOŘENÍ PŘI TAHOVÉM TESTU



Existují ještě další míry přetvoření, které jsou přípustné, pokud splňují podmínky:
Jsou nulové pro pohyb tělesa jako tuhého celku

Jeich závislost na gradientu posuvů je spojitá, spojitě diferencovatelná a monotónní
Redukují se na tenzor malých přetvoření jestliže se norma gradientu posuvů blíží 0

TEORIE MALÝCH PŘETVOŘENÍ – ZÁKLADNÍ PŘEDPOKLADY A ZJEDNODUŠENÍ

- ✘ Posuvy materiálových bodů jsou mnohem menší než jakýkoliv rozměr tělesa (jsou „nekonečně malé“), takže geometrie (tvar) tělesa a vlastnosti materiálu (hustota, tuhost) se v důsledku deformace nemění
- ✘ V důsledku předpokladu **malých přetvoření** se vztahy a rovnice mechaniky poddajných těles výrazně zjednoduší. Tento přístup se někdy nazývá teorie malých deformací, teorie malých posuvů, nebo teorie malých gradientů posuvů. Oproti tomu teorie **konečných přetvoření** vychází z opačných předpokladů a používá se v případech, kdy se jedná o velké deformace tělesa.
- ✘ Teorie nekonečně malých přetvoření je široce používána v problémech strojího a stavebního inženýrství pro napěťovou analýzu konstrukcí z relativně tuhých elastických materiálů jako je ocel a beton.
- ✘ Ve výpočtech plasticity je teorie malých přetvoření užívána většinou tehdy, kdy se jedná o součásti a konstrukce částečně v elastickém a částečně plastickém stavu, kdy elastická část tělesa výrazně omezuje rozvoj plastických přetvoření v plastické části.

TENZOR MALÝCH PŘETVOŘENÍ

Vektor posuvu:

$$u = (u_x, u_y, u_z)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y},$$

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x},$$

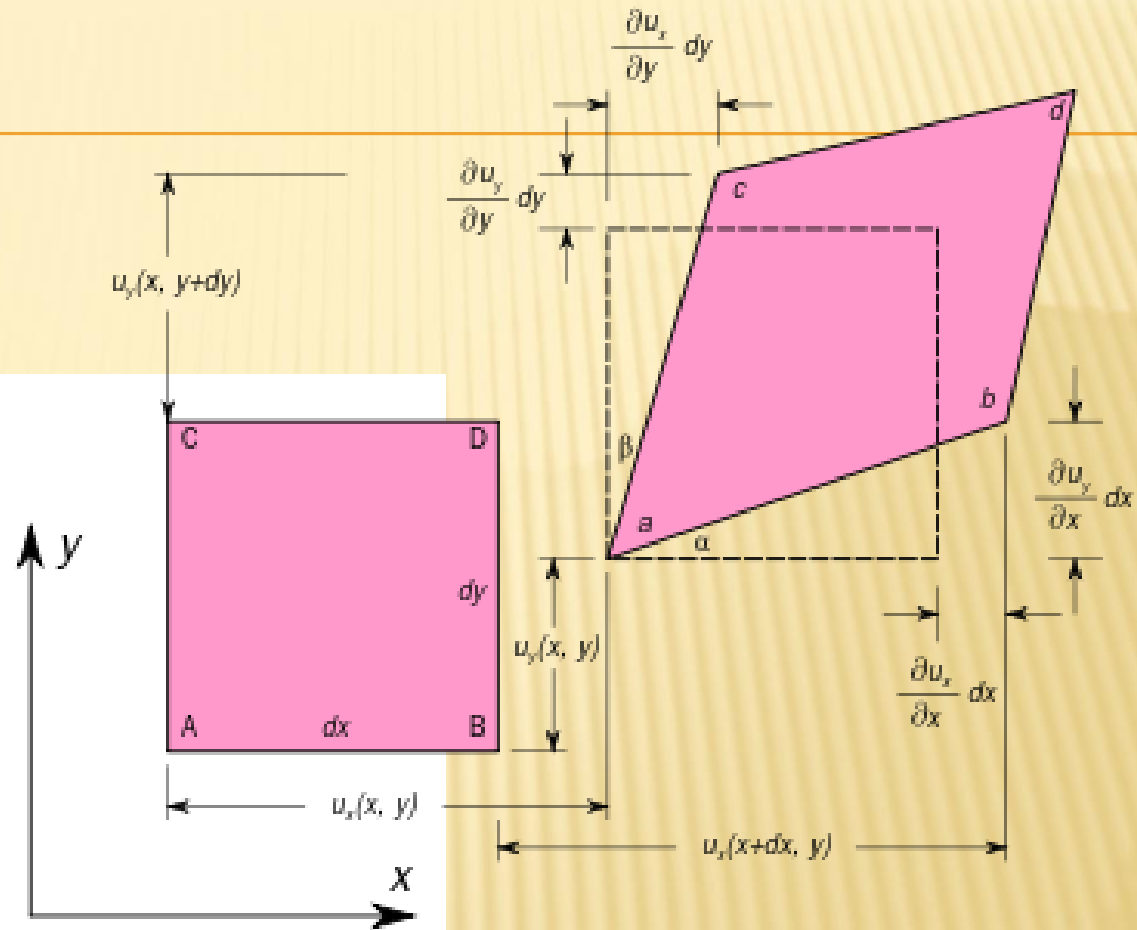
analogicky:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}.$$

Tenzor malých přetvoření:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \gamma_{12}/2 & \gamma_{13}/2 \\ \gamma_{21}/2 & \varepsilon_{22} & \gamma_{23}/2 \\ \gamma_{31}/2 & \gamma_{32}/2 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}.$$



GRADIENT POSUVU A TENZOR NATOČENÍ

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$, kde ∇u je gradient vektoru posuvu $u = (u_1, u_2, u_3)$

$$\nabla u = u_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left[(u_{i,j} + u_{j,i}) + (u_{i,j} - u_{j,i}) \right] = \frac{1}{2} \left[(\nabla u + \nabla u^T) + (\nabla u - \nabla u^T) \right] = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij},$$

kde ω_{ij} je antisymetrický tenzor rotace $\omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}$, $w_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right), \dots$

TRANSFORMACE TENZORU PŘETVOŘENÍ, INVARIANTY, HLAVNÍ SMĚRY A PŘETVOŘENÍ

Přetvoření γ_{ij} jsou tzv. inženýrské zkosity – smyková přetvoření. Jsou dvojnásobkem tenzorových složek ε_{ij} tenzoru malých přetvoření. Tento tenzor můžeme transformovat do nového zvoleného souřadného systému pomocí matice rotace A složené z kosínů úhlů mezi novými a původními osami:

\	x_1	x_2	x_3
x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

$$[\varepsilon'] = [A][\varepsilon][A]^T$$

Hlavní přetvoření $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ můžeme určit jako řešení charakteristické kubické rovnice (její koeficienty jsou invarianty tenzoru přetvoření), nebo jako vlastní čísla matice tenzoru přetvoření. U izotropního materiálu jsou hlavní směry (vektory) tenzoru napětí a tenzoru přetvoření stejné.

$$\det \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \lambda & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \lambda & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0,$$

$$I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = \varepsilon_{kk},$$

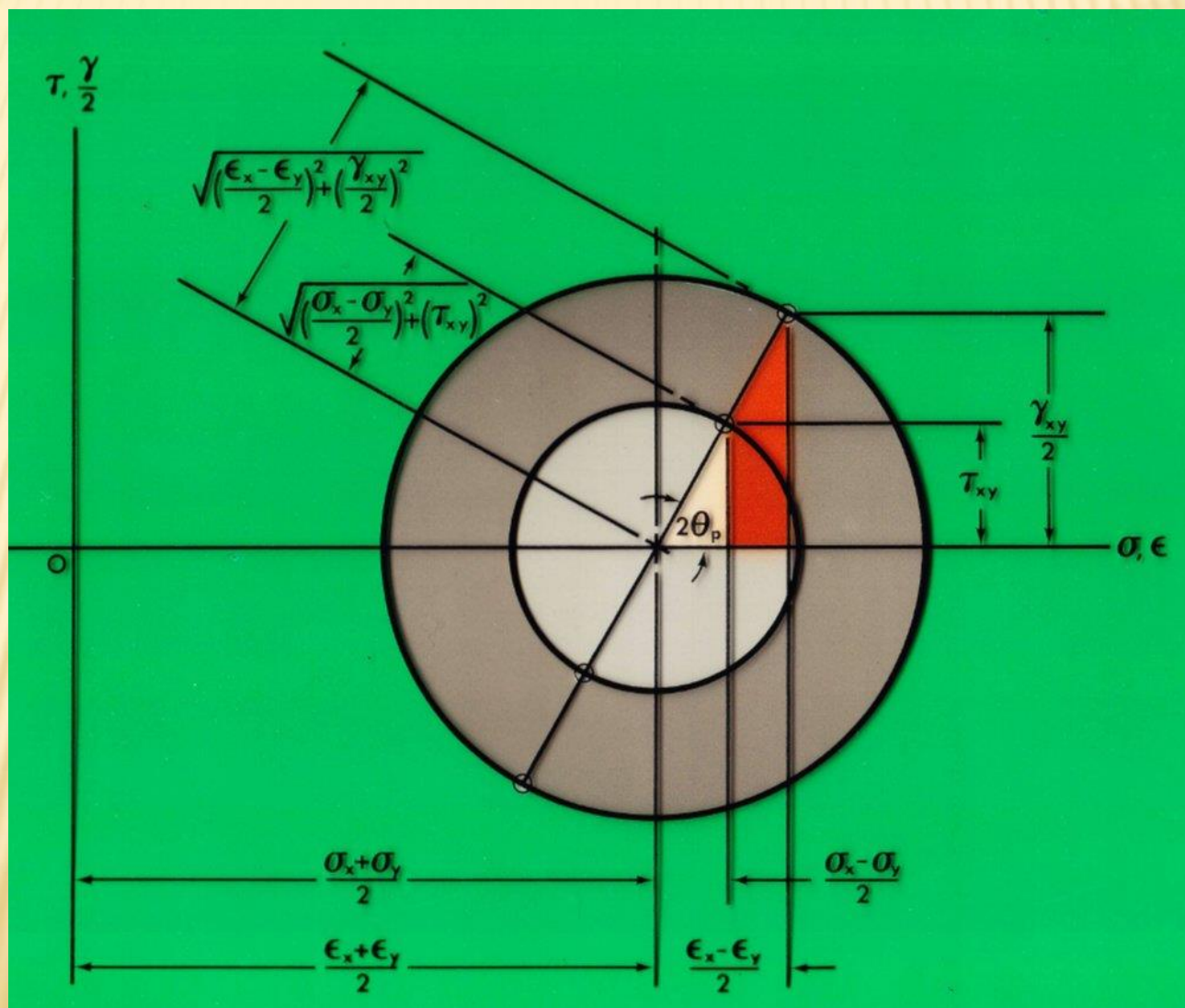
$$I_2 = \det \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + \varepsilon_{11} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} - \varepsilon_{12}^2 - \varepsilon_{23}^2 - \varepsilon_{13}^2,$$

$$I_3 = \det (\sigma_{ij}) =$$

$$= \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + 2 \varepsilon_{12} \varepsilon_{23} \varepsilon_{13} - \varepsilon_{12}^2 \varepsilon_{33} - \varepsilon_{23}^2 \varepsilon_{11} - \varepsilon_{31}^2 \varepsilon_{22}.$$

U IZOTROPNÍCH MATERIÁLŮ SE HLAVNÍ SMĚRY TENZORŮ NAPĚTÍ A PŘETVOŘENÍ SHODUJÍ



OBJEMOVÉ PŘETVOŘENÍ, DEVIÁTOR PŘETVOŘENÍ, OKTAEDRICKÉ A EKVIVALENTNÍ PŘETVOŘENÍ.

- ✗ Objemové přetvoření (dilatace) je rovno prvnímu invariantu tenzoru přetvoření

$$\frac{\Delta V}{V_0} = I_1 = (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}).$$

Tenzor přetvoření rozložíme na kulový tenzor změny objemu a na deviátor:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_M \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^D, \text{ kde } \varepsilon_M = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}),$$

$$\varepsilon_{ij}^D = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} - \varepsilon_M & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} - \varepsilon_M & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} - \varepsilon_M \end{bmatrix},$$

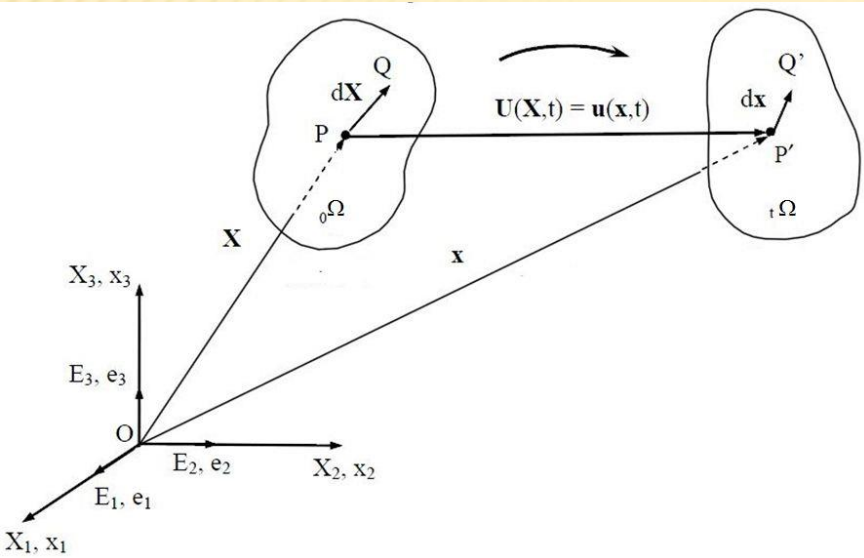
Opět lze určit hlavní deviátorová přetvoření a invarianty

$$J_1 = 0, J_2 = \frac{1}{3} I_1^2 - I_2, J_3 = \det[\varepsilon_{ij}^D].$$

Oktaedrická přetvoření v závislosti na hlavních přetvořeních $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$:

$$\gamma_{okt} = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}, \quad \varepsilon_{okt} = \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{1}{3} I_1.$$

DEFORMAČNÍ GRADIENT – KOMPLETNÍ POPIS DEFORMACE TĚLESA



$P(X_1, X_2, X_3)$ = materiálový bod v nedeformované (referenční, materiálové) konfiguraci ${}_0\Omega$

$P'(x_1, x_2, x_3)$ = materiálový bod v deformované (prostorové) konfiguraci ${}_t\Omega$

$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \mathbf{X}$ je posuv bodu P

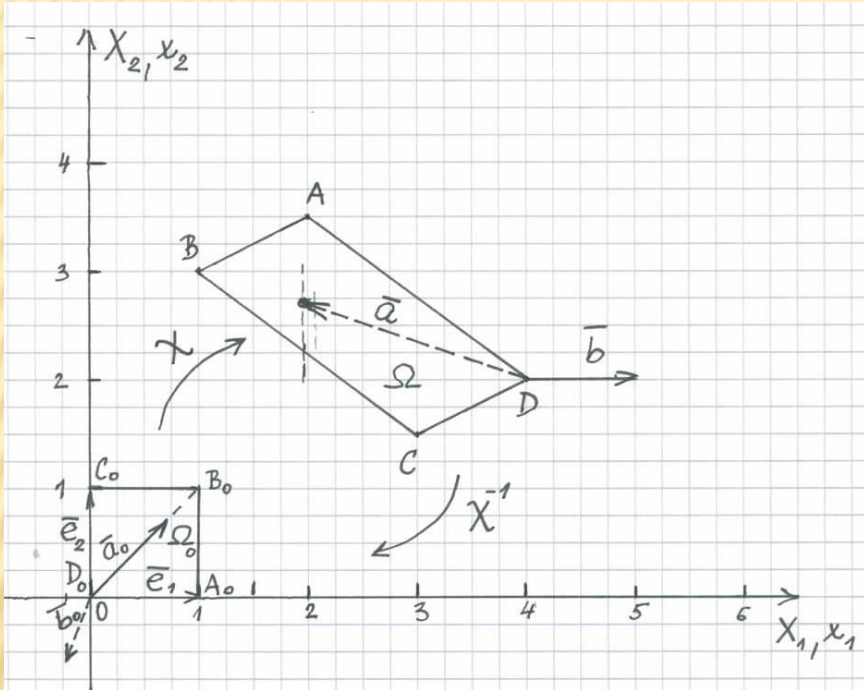
Deformace bude zcela popsána, jestliže budeme ke každému bodu P znát jeho polohu po deformaci P'

Musí tedy existovat jednoznačné zobrazení χ mezi souřadnicemi nedeformované a deformované konfigurace :

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \text{ a inverzní vztah } \mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t).$$

Deformační gradient: $F = \frac{\partial \chi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}}$, $F^{-1} = \frac{\partial \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}}$, $F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{bmatrix}$, $d\mathbf{x} = F d\mathbf{X}$.

PŘÍKLAD



Mějme třídimenzionální deformaci, kdy $x_3 = X_3$ na obrázku kdy čtverec $A_0B_0C_0D_0$ o straně 1 se deformuje na rovnoběžník $ABCD$. Stanovme deformační gradient F , stanovme jak se deformuje jednotková úsečka a_0 daná v nedeformované konfiguraci a jaká je nedeformovaná úsečka b_0 k jednotkové úsečce b . Zobrazení χ je zřejmě lineární:

$$x_i = a_{ij}X_j + d_i, \quad i, j = 1, 2,$$

$$D_0(0,0) \rightarrow D(4,2) \Rightarrow d_1 = 4, d_2 = 2;$$

$$A_0(1,0) \rightarrow A(2,3.5) \Rightarrow a_{11} = -2, a_{21} = 1.5;$$

$$C_0(0,1) \rightarrow C(3,1.5) \Rightarrow a_{12} = -1, a_{22} = -0.5;$$

$$x_1 = -2X_1 - X_2 + 4, \quad x_2 = 1.5X_1 - 0.5X_2 + 2, \quad x_3 = X_3.$$

$$F = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad F^{-1} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 & 0 \\ -0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \{a\} = [F]\{a_0\} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1.5 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow |a| = \sqrt{5};$$

$$\{b_0\} = [F]^{-1}\{b\} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.4 & 0 \\ -0.6 & -0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow |b| = \sqrt{2/5}$$

GRADIENT VEKTORU POSUVU, TENZORY PŘETVOŘENÍ

- ✗ Vektor posuvu v materiálovém a prostorovém popisu:
 $\mathbf{U}(\mathbf{X},t)=\mathbf{x}(\mathbf{X},t)-\mathbf{X}$, $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\mathbf{x}-\mathbf{X}(\mathbf{x},t)$
- ✗ Gradient posuvu v materiálovém a prostorovém popisu:

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{U} = \mathbf{F} - \mathbf{I}, \quad \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u} = \mathbf{I} - \mathbf{F}^{-1}.$$

Pravý Cauchy-Green tenzor přetvoření $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$,

hlavní hodnoty \mathbf{C} jsou rovny kvadrátům protažení

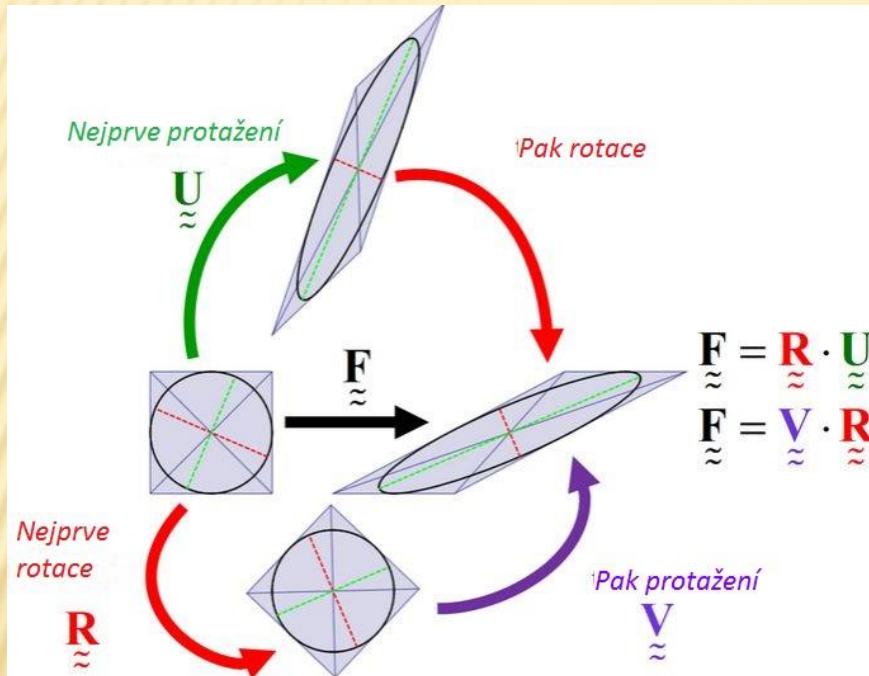
$$\mathbf{C}_{HLAV} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix} \text{ v hlavních směrech.}$$

Green-Lagrange tenzor přetvoření $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I})$, $E_{KL} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_j}{\partial X_L} \frac{\partial x_j}{\partial X_K} - \delta_{KL} \right)$,

nebo v závislosti na gradientu posuvu:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left((\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{U})^T + \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{U} \right) + \frac{1}{2} (\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{U})^T \nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{U}, \quad E_{KL} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_K}{\partial X_L} + \frac{\partial U_L}{\partial X_K} + \frac{\partial U_M}{\partial X_L} \frac{\partial U_M}{\partial X_K} \right).$$

POLÁRNÍ ROZKLAD DEFORMAČNÍHO GRADIENTU



Logaritmický (Henckyho) tenzor přetvoření používaný v teorii tváření se určí jako přirozený logaritmus symetrického tenzoru protažení \mathbf{U} . To však vyžaduje výpočet vlastních hodnot \mathbf{U} = hlavních protažení, jejich logaritmování a transformování výsledku zpět do původního souřadného systému.

POLÁRNÍ ROZKLAD DEFORMAČNÍHO GRADIENTU $F=R*U$ V MATLABU URČENÍ HODNOT HENCKYHO (LOGARITMICKÉHO) TENZORU PŘETVOŘENÍ

× F =deformační gradient

× 1.0000 0.4950 0.5000
 × -0.3330 1.0000 -0.2470
 × 0.9590 0 1.5000

× $C=F'*F$

× C =Pravý Cauchy-Green tenzor
přetvoření

× 2.0306 0.1620 2.0208
 × 0.1620 1.2450 0.0005
 × 2.0208 0.0005 2.5610

× $[V,D]=\text{eig}(C)$

× V =Vlastní vektory tenzoru
přetvoření C-G = hlavní směry

× 0.7483 -0.0679 0.6599
 × -0.1206 -0.9921 0.0347
 × -0.6523 0.1056 0.7506

D =Vlastní čísla C-G =hlavní
přetvoření

0.2429 0 0
 0 1.2561 0
 0 0 4.3376

$U=\text{sqrt}(D)$

U =tenzor protažení λ v hlavních
směrech

0.4929 0 0
 0 1.1207 0
 0 0 2.0827

$H=\text{diag}(\log(\text{diag}(U)))$

H = Henckyho tenzor přetvoření v
hlavních směrech

-0.7075 0 0
 0 0.1140 0
 0 0 0.7337

Návrat do původního souřadného
systému :

$H3=V*H*V'$

$H3 =$

-0.0762 0.0883 0.7079
 0.0883 0.1028 -0.0485
 0.7079 -0.0485 0.1136

$U3=V*U*V'$

$U3 =$

1.1880 0.0787 0.7829
 0.0787 1.1128 -0.0244
 0.7829 -0.0244 1.3955

$R=F*\text{inv}(U)$

R = matice rotace

2.0288 0.4417 0.2401
 -0.6756 0.8923 -0.1186
 1.9456 0 0.7202

Lze použít též webovou aplikaci

<http://www.continuummechanics.org/cm/polardecomposition.html>