

Analýza napjatosti

PLASTICITA

TENZOR NAPĚTÍ

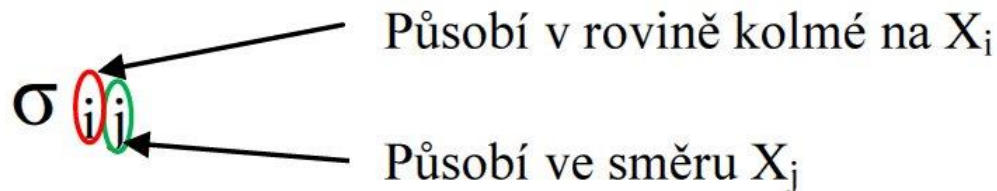
- ✘ Teplota v daném bodě je skalár, je to tenzor nultého řádu, který nezávisí na změně souřadného systému
- ✘ Síla je vektor, je to tenzor prvního řádu, v trojrozměrném prostoru má 3 složky, které se transformují při změně souřadného systému podle vztahu

$$F'_i = a_{ij} F_j ,$$

kde $i, j = 1, 2, 3$ a a_{ij} jsou kosiny uhlů mezi příslušnými osami nového (čárkovaného) a původního souřadného systému. Ve vztahu použijeme Einsteinovo součtové pravidlo – sčítá se podle opakujícího se indexu

- ✘ Napětí i přetvoření jsou symetrické tenzory druhého řádu mají $3^2 = 9$ složek, z nichž je pouze 6 nezávislých v důsledku symetrie, při změně souřadného systému se složky transformují podle vztahu

$$\sigma'_{ij} = a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl}$$



TENZORY TUHOSTI A PODDAJNOSTI

- ✘ Zobrazení mezi tenzory napětí a přetvoření obstarávají tenzory čtvrtého řádu – tenzor tuhosti $\bar{\mathbf{C}}$ a tenzor poddajnosti $\bar{\mathbf{S}}$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} , \varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} .$$

Složky tenzorů čtvrtého řádu se transformují podle vztahu

$$C'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} C_{mnpq} .$$

- ✘ Tenzor čtvrtého řádu má $3^4=81$ složek, avšak tenzory tuhosti $\bar{\mathbf{C}}$ a poddajnosti $\bar{\mathbf{S}}$ reálných materiálů mají díky symetriím pouze 21 nezávislých složek (anizotropní materiál), které lze vhodným způsobem uspořádat do symetrické matice 6x6. Počet nezávislých složek se dále snižuje, pokud má materiál roviny symetrie (13 konstant má materiál s 1 rovinou symetrie, 9 konstant má ortotropní materiál se dvěma rovinami symetrie, 5 má příčně izotropní materiál a 2 nezávislé konstanty má izotropní materiál).

TRANSFORMACE TENZORU NAPĚTÍ

- ✘ Uspořádáme-li kosíny úhlů mezi osami nového (čárkovaného) a původního souřadného systému do matice rotace A podle schematu

\	x_1	x_2	x_3
x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

- ✘ Můžeme transformační vztah pro tenzor napětí $\sigma'_{ij} = a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl}$ zapsat jako

$$\sigma' = A \sigma A^T$$

$$\begin{bmatrix} \sigma'_{11} & \sigma'_{12} & \sigma'_{13} \\ \sigma'_{21} & \sigma'_{22} & \sigma'_{23} \\ \sigma'_{31} & \sigma'_{32} & \sigma'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} .$$

NAPĚŤOVÝ VEKTOR 2-D

Zatížené rovinné těleso rozdělíme myšleným řezem na dvě části. Vnitřní síly jsou rozloženy na jednotku plochy. Na malou plošku dA s normálou n bude působit napěťový vektor t [Pa], který můžeme rozložit na dvě složky – σ ve směru normály a τ ve směru tečném k plošce myšleného řezu.

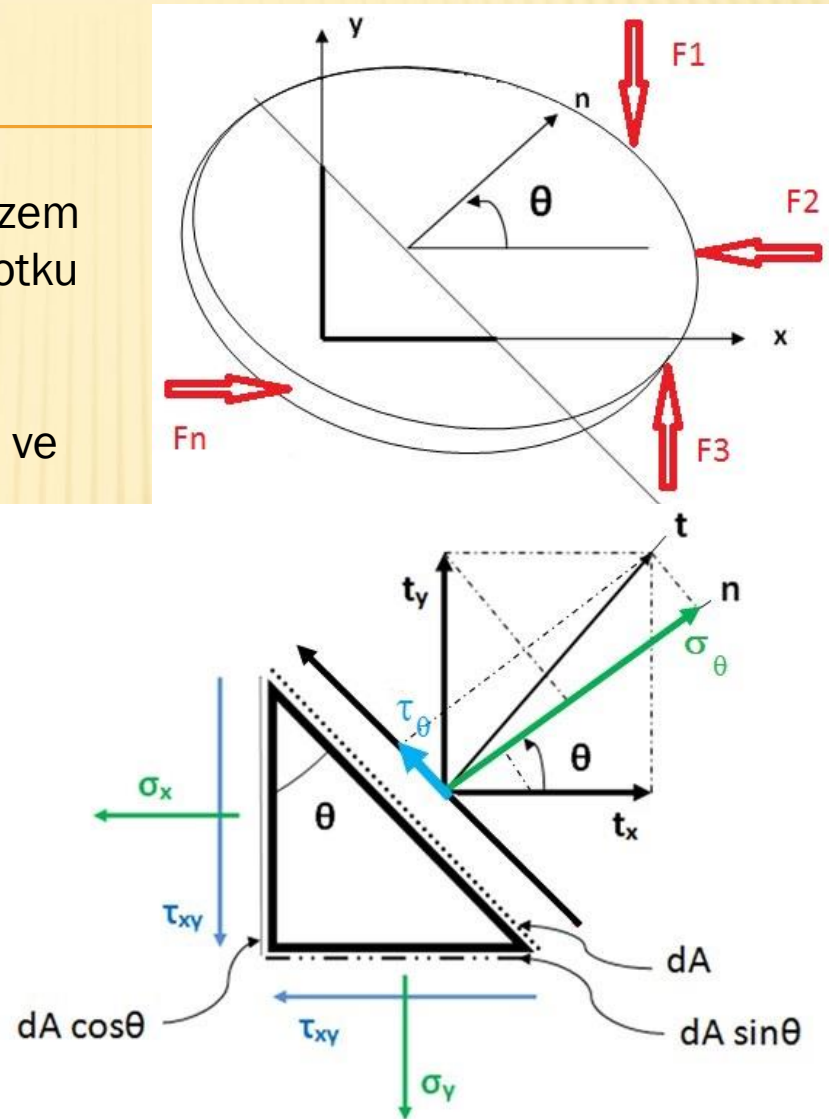
Stejným způsobem můžeme rozložit napěťové vektory ve dvou dalších myšlených řezech vedených souběžně s osami zvoleného souřadného systému. Síly působící na takto oddělenou část tělesa musí být v rovnováze.

$$\sigma_{\theta} dA = \sigma_x \cos \theta dA \cos \theta + \sigma_y \sin \theta dA \sin \theta +$$

$$+ \tau_{xy} \sin \theta dA \cos \theta + \tau_{xy} \cos \theta dA \sin \theta \Rightarrow$$

$$\sigma_{\theta} = \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} 2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\tau_{\theta} = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

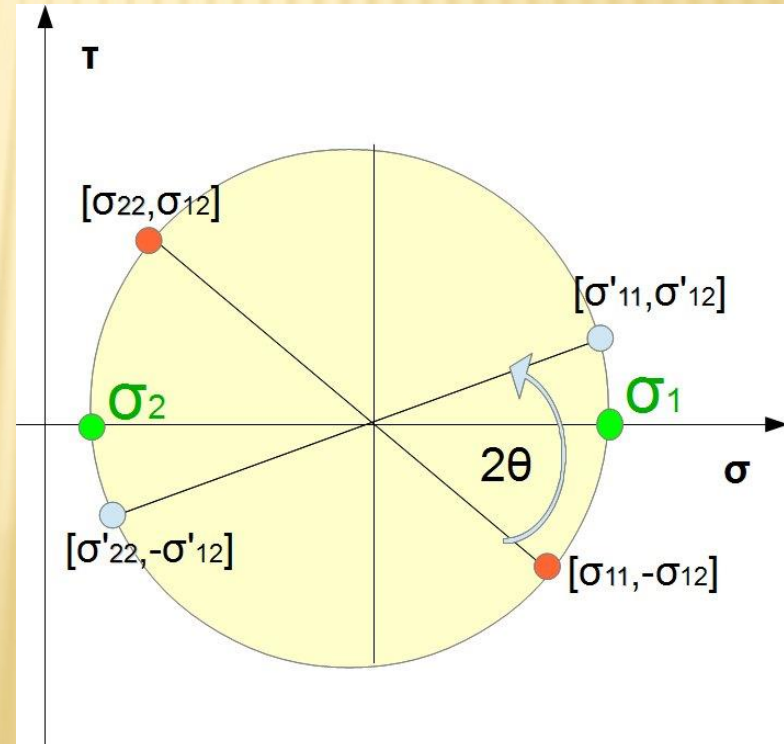
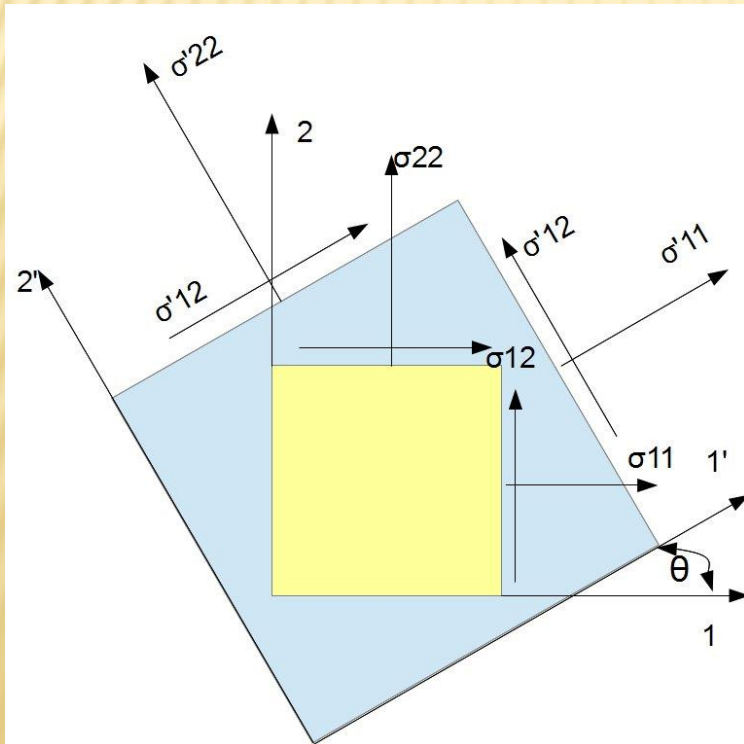


Napěťový vektor závisí na směru n myšleného řezu. Existují řezy, ve kterých má napěťový vektor směr normály ($\tau=0$)

ROVINNÁ NAPJATOST – TRANSFORMACE NAPĚTÍ POMOCÍ MOHROVY KRUŽNICE

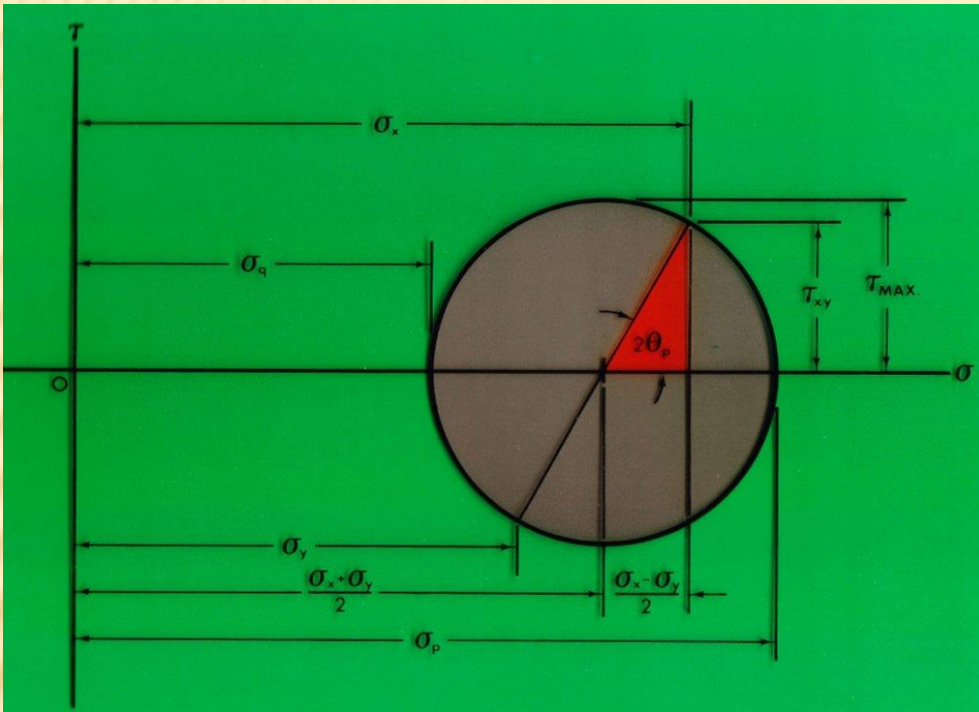
$$\begin{aligned}\sigma'_{11} &= \sigma_{11} \cos^2 \theta + \sigma_{22} \sin^2 \theta + \sigma_{12} 2 \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma'_{12} &= -(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta), \\ \sigma'_{22} &= \sigma_{11} \sin^2 \theta + \sigma_{22} \cos^2 \theta - \sigma_{12} 2 \sin \theta \cos \theta.\end{aligned}$$

Je zřejmé, že lze nalézt takový úhel θ , aby v daných rovinách působila pouze normální napětí σ_1 a σ_2 . Jsou to hlavní napětí a hlavní roviny.



NAPĚŤOVÁ KAMERA WWW

HLAVNÍ NAPĚTÍ A HLAVNÍ ROVINY VE 2D

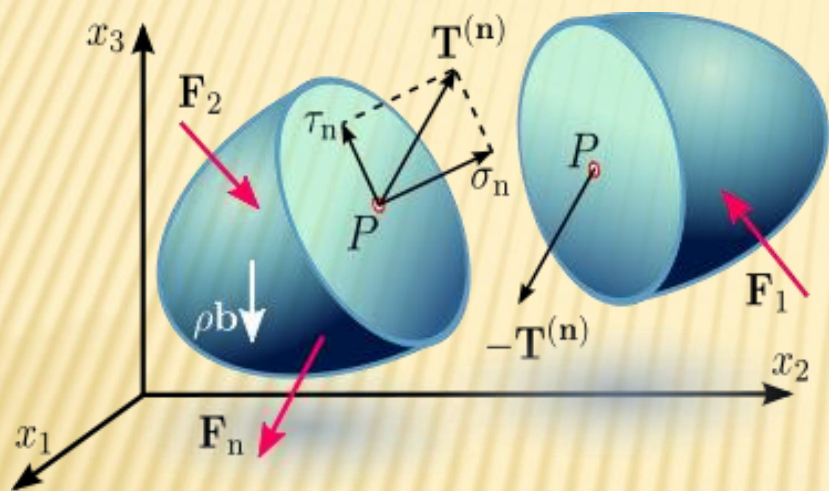


- ✘ Hlavní napětí a hlavní směry můžeme snadno určit pomocí Mohrovy kružnice
- ✘ Velikost hlavních napětí bude dána souřadnicí σ středu kružnice (je rovna průměru hodnot σ_x a σ_y), ke které přičteme/odečteme poloměr kružnice
- ✘ Hlavní směry vypočteme z červeného trojúhelníka

$$\sigma_{p,q} = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2},$$

$$\tan(2\theta_{p,q}) = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)}.$$

NAPĚŤOVÝ VEKTOR 3D



$$\sigma_n = \mathbf{T}^{(n)} \cdot \mathbf{n}, \quad \tau_n = \sqrt{\mathbf{T}^{(n)2} - \sigma_n^2}.$$

- ✘ Zatížené těleso rozdělíme myšleným řezem na dvě části. Na malou plošku v okolí materiálového bodu P působí napěťový vektor $\mathbf{T}^{(n)}(\mathbf{n}, \mathbf{x}, t)$, který je spojitou funkcí souřadnic $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$, normály \mathbf{n} a času t . Na druhou část řezu působí stejně velký vektor opačného smyslu.
- ✘ Napěťový vektor můžeme rozložit na složku do směru normály σ_n a do směru tečny k řezu $\boldsymbol{\tau}_n$.
- ✘ Velikost σ_n je dána skalárním součinem napěťového vektoru a vektoru normály, velikost složky $\boldsymbol{\tau}_n$ dopočítáme z Pythagorovy věty

NAPĚŤOVÝ VEKTOR 3-D

Mějme nějakou plošku dS myšleného řezu zatíženým tělesem. Zvolme souřadný systém tak, že ploška leží v rovině (x_1, x_3) a osa x_2 je na ní kolmá. Na plošku působí výsledný napěťový vektor t_2 [Pa] a tedy výsledná síla $t_2 dS$.

Tuto sílu $t_2 dS$ můžeme rozložit na dvě složky (červené)

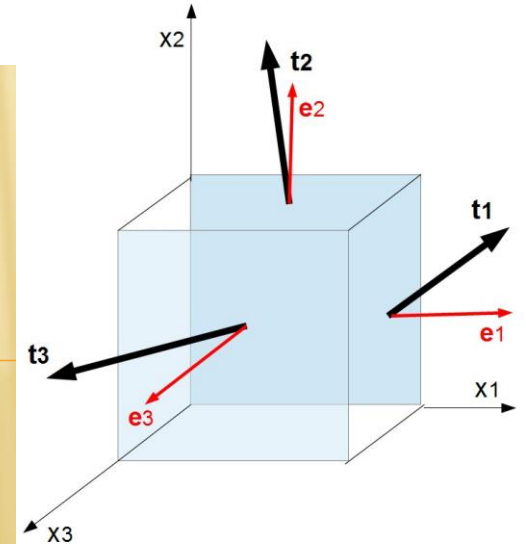
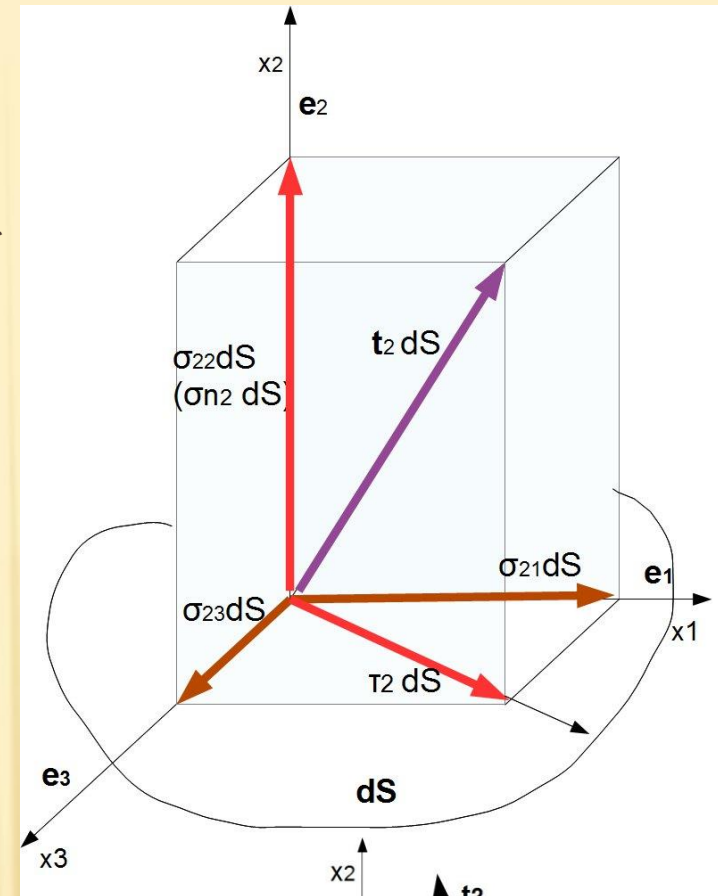
- složku ve směru normály $\sigma_{n_2} dS = \sigma_{22} dS$
- složku ve směru tečny $\tau_2 dS$ (leží v rovině (x_1, x_3))

Tečnou složku můžeme dále rozložit do směru souřadných os x_1 a x_3 (hnědá barva) tj. na $\sigma_{23} dS$ a $\sigma_{21} dS$.

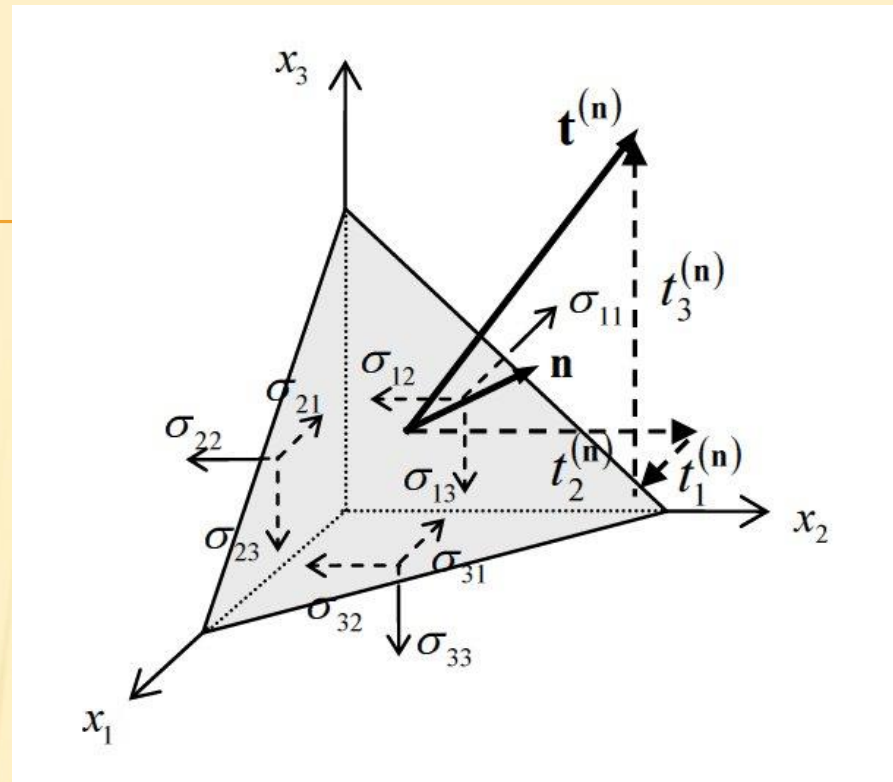
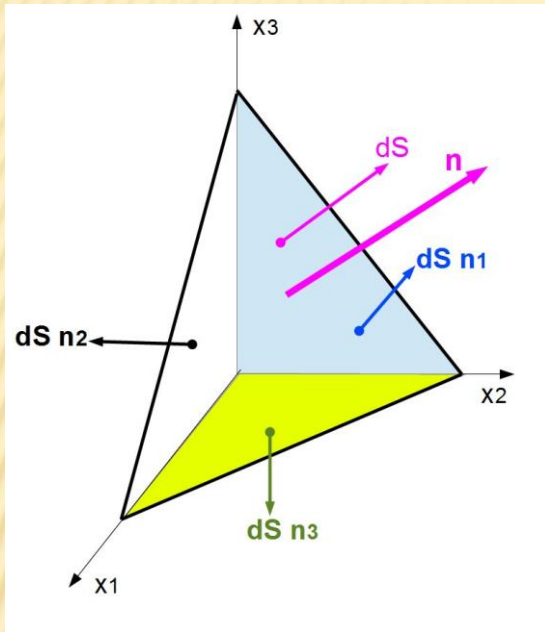
Napěťový vektor t_2 tedy můžeme zapsat jako součet:

$$\bar{t}_2 = \bar{e}_1 \sigma_{21} + \bar{e}_2 \sigma_{22} + \bar{e}_3 \sigma_{23} \Rightarrow t_j = e_i \sigma_{ji},$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{t}_1 \\ \bar{t}_2 \\ \bar{t}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{Bmatrix},$$



CAUCHYHO ZÁKON NAPĚTÍ



Čtyřstěn je vyňatý myšlenými řezy ze zatíženého tělesa. Na jeho přední stranu o ploše dS působí napěťový vektor $\mathbf{t}^{(n)} = (t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, t_3^{(n)})$ a výsledná síla $\mathbf{t}^{(n)} dS$ která musí být v rovnováze se silami na ostatních ploškách čtyřstěnu, kde jsme příslušné napěťové vektory rozložili na složky ve směru souřadných os. Složkové podmínky rovnováhy:

$$t_1^{(n)} dS = \sigma_{11} n_1 dS + \sigma_{21} n_2 dS + \sigma_{31} n_3 dS, \quad \text{atd,}$$

$$\Rightarrow t_j = n_i \sigma_{ij}, \quad \left\{ t_1^{(n)} \quad t_2^{(n)} \quad t_3^{(n)} \right\} = \left\{ n_1 \quad n_2 \quad n_3 \right\} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix},$$

HLAVNÍ NAPĚTÍ, INVARIANTY TENZORU NAPĚTÍ

V každém materiálovém bodě zatíženého tělesa existují tři navzájem kolmé roviny s normálami \mathbf{n} , kde napěťové vektory jsou kolmé k rovinám (působí ve směru normál) a smyková napětí jsou 0. Jsou to hlavní roviny, hlavní směry a hlavní napětí.

$$\mathbf{t}^{(n)} = \lambda \mathbf{n} = \sigma_n \mathbf{n} \Rightarrow t_i^{(n)} = \sigma_{ji} n_j = \lambda n_i,$$

$$(\sigma_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0 \Rightarrow ([\sigma] - \lambda [I]) \{n\} = \{0\}$$

$$\det([\sigma] - \lambda [I]) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \lambda \end{bmatrix} = 0,$$

Charakteristická rovnice má tři reálné kořeny = hlavní napětí. Každému z nich přísluší hlavní vektor \mathbf{n} . Koeficienty charakteristické rovnice I_1 , I_2 a I_3 jsou invarianty napěťového tenzoru a nezávisí na orientaci souřadného systému. Hlavní napětí a hlavní směry lze řešit jako problém vlastních čísel matice tenzoru napětí. Většina matematických softvrů to umožňuje.

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0,$$

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{kk},$$

$$I_2 = \det \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{31} & \sigma_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{11} \sigma_{33} + \sigma_{22} \sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2,$$

$$I_3 = \det(\sigma_{ij}) =$$

$$= \sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} + 2 \sigma_{12} \sigma_{23} \sigma_{13} - \sigma_{12}^2 \sigma_{33} - \sigma_{23}^2 \sigma_{11} - \sigma_{31}^2 \sigma_{22}.$$

Matlab: $[V, D] = \text{eig}(A)$, D =matice vlastních čísel a sloupce V matice jsou vlastní vektory A
 Nebo webová aplikace: <http://www.continuummechanics.org/cm/techforms/Eigen.html>

HLAVNÍ NAPĚTÍ - VÝPOČET VLASTNÍCH ČÍSEL A VEKTORŮ MATICE NAPĚTÍ

Eigenvalues & Eigenvectors

Input			Eigenvectors		
52	25	-18	0.913036	0.222675	-0.341731
25	-30	5	-0.293091	0.940839	-0.170041
-18	5	20	0.283651	0.255414	0.924286

Calculate

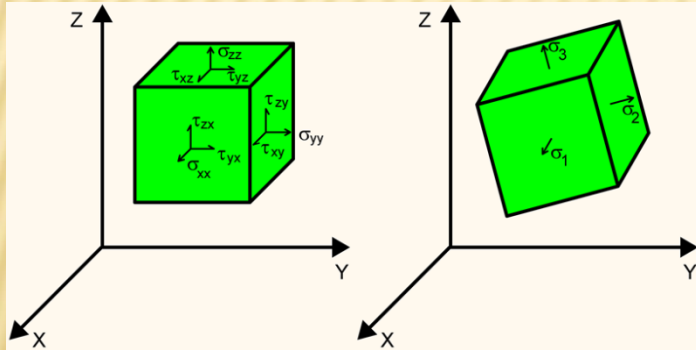
Eigenvalues

64.83417 -38.69188 15.85772

Up

Reset

Help



$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3, \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3).$$

$$A = \begin{bmatrix} 52 & 25 & -18 \\ 25 & -30 & 5 \\ -18 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\gg [V \ D]=\text{eig}(A)$$

$$V = \begin{bmatrix} -0.2931 & -0.2837 & -0.9130 \\ 0.9408 & -0.2554 & -0.2227 \\ -0.1700 & -0.9243 & 0.3417 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -38.6919 & 0 & 0 \\ 0 & 15.8577 & 0 \\ 0 & 0 & 64.8342 \end{bmatrix}$$

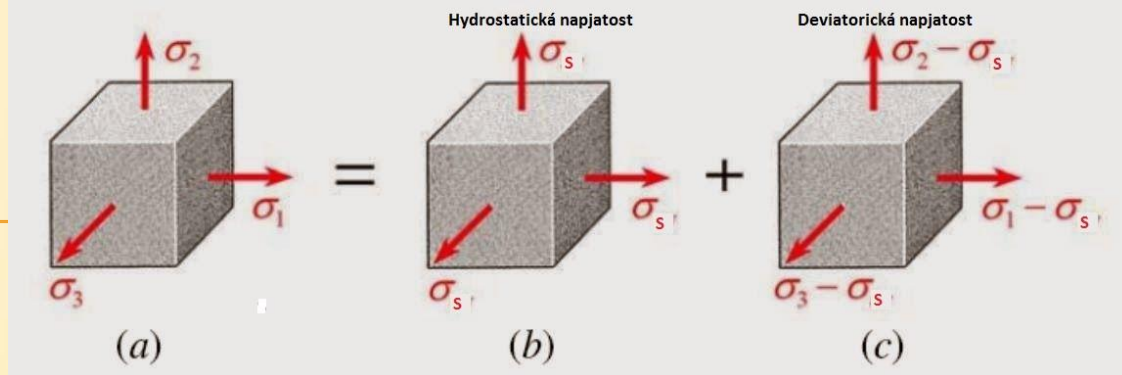
$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix},$$

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$$

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

ROZKLAD TENZORU NAPĚTÍ



- ✘ Tenzor napětí lze rozložit na hydrostatický (kulový) tenzor a na deviator

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}$$

- ✘ Kde

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3}$$

$$\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_{11} - \sigma_{22} - \sigma_{33}) & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \frac{1}{3}(2\sigma_{22} - \sigma_{11} - \sigma_{33}) & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \frac{1}{3}(2\sigma_{33} - \sigma_{11} - \sigma_{22}) \end{bmatrix}$$

INVARIANTY DEVIÁTORU TENZORU NAPĚTÍ

- ✘ Při plastické deformaci se objem prakticky nemění a hydrostatická část napjatosti se nepodílí na plastickém přetvoření. Důležitý je deviatorický tenzor S_{ij}

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = \frac{1}{3}I_1 = \Pi,$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \Pi \delta_{ij} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} - \Pi & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \Pi & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \Pi \end{bmatrix}.$$

- ✘ Zcela analogicky lze odvodit hlavní napětí deviatorického tenzoru, hlavní směry jsou totožné s hlavními směry tenzoru napětí σ_{ij} . Charakteristická rovnice :

$$|S_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$$

$$\lambda^3 - J_1 \lambda^2 - J_2 \lambda - J_3 = 0$$

$$J_1 = s_{kk} = s_{11} + s_{22} + s_{33} = 0, \quad J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}, \quad J_3 = \det(S_{ij}).$$

- ✘ Invariant J_2 je velmi důležitá veličina, uvedeme několik jeho vyjádření:

$$J_2 = -s_{11} s_{22} - s_{11} s_{33} - s_{22} s_{33} + s_{12}^2 + s_{23}^2 + s_{13}^2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 =$$

$$= \frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]. \quad J_2 = \frac{1}{3} I_1^2 - I_2, \quad J_3 = \frac{2}{27} I_1^3 - \frac{1}{3} I_1 I_2 + I_3.$$

SOUVISLOST INVARIANTU DEVIÁTORU J_2 S EKVIVALENTNÍM NAPĚTÍM PODLE HMH

$$\sigma_{HMH} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 \right] + 3\sigma_{12}^2 + 3\sigma_{23}^2 + 3\sigma_{13}^2} = \sqrt{3J_2},$$
$$\sigma_{HMH} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Ekvivalentní napětí podle HMH je rovno odmocnině trojnásobku invariantu J_2 . HMH hypotéza pevnosti vychází z předpokladu, že dvě napjatosti jsou ekvivalentní shodují-li se jejich distorsní deformační energie. Distorsní deformační energie je zároveň základem Misesovy podmínky plasticity.

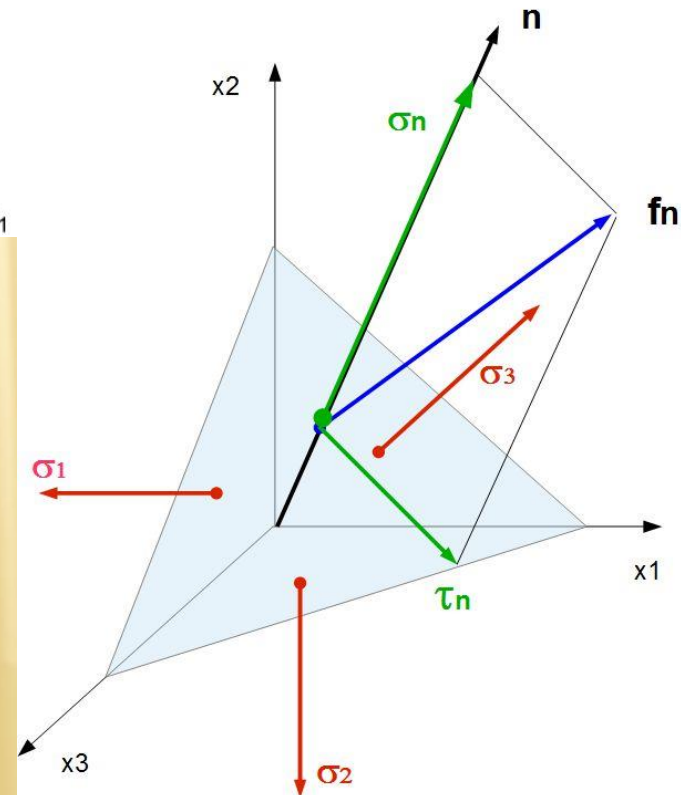
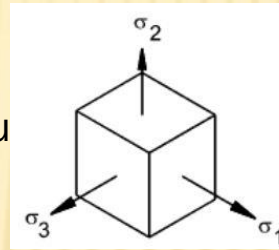
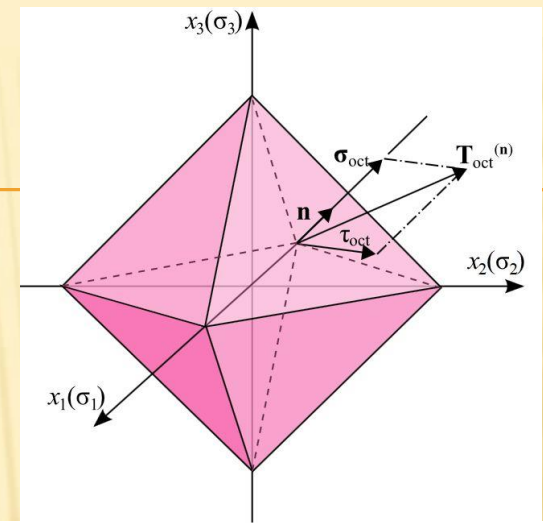
NAPJATOST ČISTÉHO SMYKU

Je to napjatost, kdy v daném souřadném systému máme pouze smyková napětí:

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & 0 \end{bmatrix}.$$

OKTAEDRICKÁ NAPĚTÍ

- zvolme souřadný systém tak, že jeho osy \equiv s hlavními osami napjatosti
- určíme napěťový vektor \mathbf{f}_n v rovině, jejíž normála \mathbf{n} svírá stejný úhel α se souřad. osami
- rozložme napěťový vektor na vektor ve směru normály σ_n a do směru tečny k rovině τ_n
- dostaneme tzv. oktaedrická napětí (normální a smykové), která mají zajímavé hodnoty, které jsou stejné ve všech oktaedrických rovinách



$$3 \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow n_1 = n_2 = n_3 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\mathbf{f}_n = \sigma_1 n_1 \mathbf{e}_1 + \sigma_2 n_2 \mathbf{e}_2 + \sigma_3 n_3 \mathbf{e}_3 = \frac{\sqrt{3}}{3} (\sigma_1 \mathbf{e}_1 + \sigma_2 \mathbf{e}_2 + \sigma_3 \mathbf{e}_3),$$

$$\sigma_n = \mathbf{f}_n \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1,$$

$$\tau_n = \sqrt{f_n^2 - \sigma_n^2} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2.$$