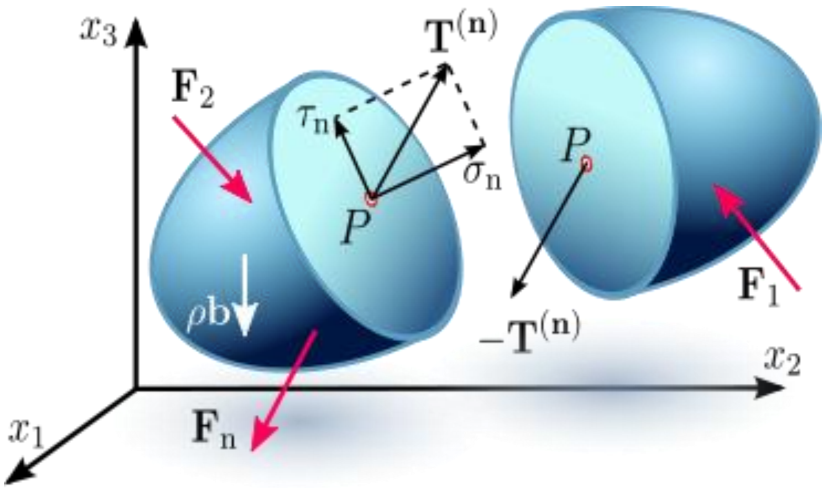
Míry napětí

Napěťový vektor 3d



- Zatížené těleso rozdělíme myšleným řezem na dvě části. Na malou plošku v okolí materiálového bodu P působí napěťový vektor $\mathbf{T}^{(n)}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{x}, t)$, který je spojitou funkcí souřadnic $\boldsymbol{x}(x_1,x_2,x_3)$, normály $\boldsymbol{n}$ a času t. Na druhou část řezu působí stejně velký vektor opačného smyslu.
- Napěťový vektor můžeme rozložit na složku do směru normály $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{n}$ a do směru tečny k řezu $\boldsymbol{\tau}_\mathbf{n}$.
- Velikost $\boldsymbol{\sigma}_\mathbf{n}$ je dána skalárním součinem napěťového vektoru a vektoru normály, velikost složky $\boldsymbol{\tau}_\mathbf{n}$ dopočítáme z Pythagorovy věty

$$\sigma_n = \boldsymbol{T}^{(n)} \bullet \boldsymbol{n}, \quad \tau_n = \sqrt{T^{(n)2} + \sigma_n{}^2}.$$

Díky Wikipedia za obrázek.

Napěťový vektor 3-d

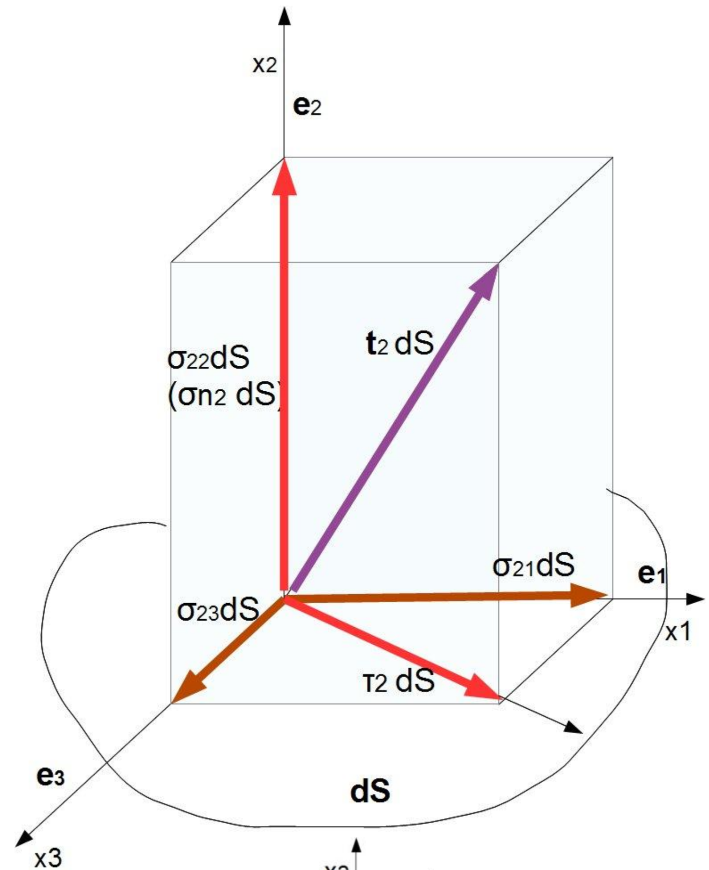
Mějme nějakou plošku *dS* myšleného řezu zatíženým tělesem. Zvolme souřadný systém tak, že ploška leží v rovině (x_1, x_3) a osa x_2 je na ní kolmá. Na plošku působí výsledný napěťový vektor $\boldsymbol{t_2}$ [Pa] a tedy výsledná síla $\boldsymbol{t_2}\, dS$.

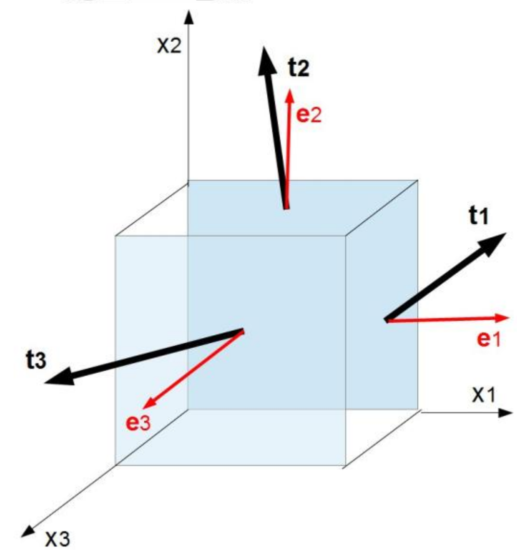
Tuto sílu $\mathbf{t_2}$ dS můžeme rozložit na dvě složky (červené)

- složku ve směru normály $\sigma_{n2}\, dS=\sigma_{22}\, dS$
- složku ve směru tečny τ_2dS (leží v rovině (x_1, x_3))

Tečnou složku můžeme dále rozložit do směru souřadných os x_1 a x_3 (hnědá barva) tj. na $\sigma_{23}\, dS$ a $\sigma_{21}\, dS$.

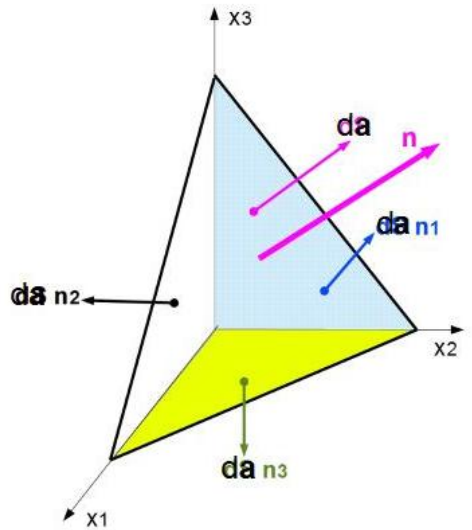
Napěťový vektor $\boldsymbol{t_2}$ tedy můžeme zapsat jako součet:

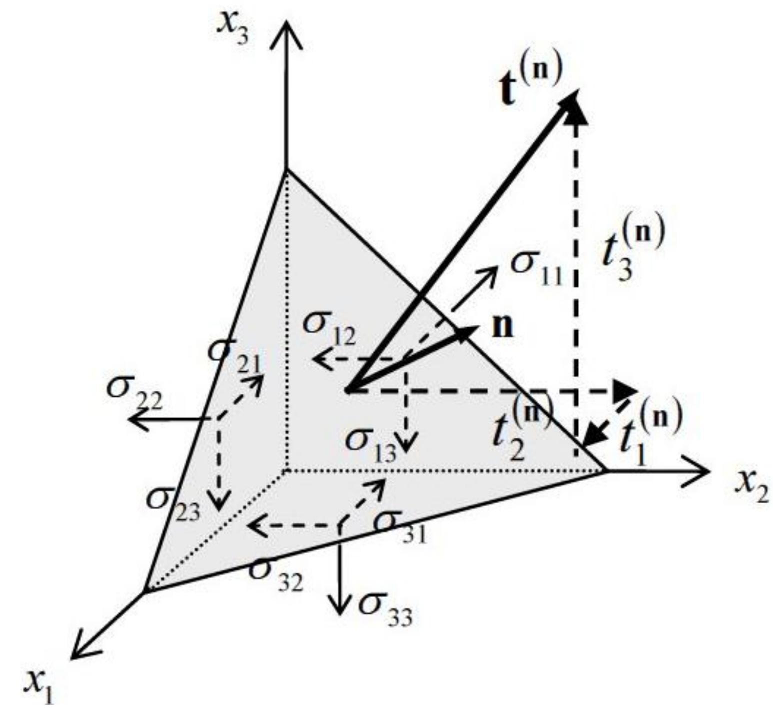




[redacted]

Cauchyho zákon napětí – deformovaná konfigurace
Cauchyho skutečné napětí





Čtyřstěn je vyňatý myšlenými řezy ze zatíženého **deformovaného** tělesa. Na jeho přední stranu o ploše da působí napěťový vektor $\mathbf{t}^{(n)}=(t_1^{(n)}, t_2^{(n)}, t_3^{(n)})$ a výsledná síla $\mathbf{t}^{(n)}$ da která musí být v rovnováze se silami na ostatních ploškách čtyřstěnu, kde jsme příslušné napěťové vektory rozložili na složky ve směru souřadných os. Složkové podmínky rovnováhy:

$$t_1^{(n)}da = \sigma_{11}n_1 da + \sigma_{21}n_2 da + \sigma_{31}n_3 da, \quad \text{atd.}$$

$$\{t\} = \{n\}^T [\sigma],$$

$$\{t\} = [\sigma]^T \{n\},$$

$$\begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix},$$

Obecná rovnice roviny

- V obecné rovnici $ax + by + cz + d = 0$ roviny δ, určené bodem $P[p1; p2; p3]$ a normálovým vektorem n = $(n1; n2; n3)$, odpovídají koeficienty a, b, c souřadnicím jejího normálového vektoru n; $a = n1$, $b = n2$ a $c = n3$.
- Určete obecnou rovnici roviny *ABC*, kde $A[2; -2; 1]$, $B[1; -1; 4]$ a $C[0; 0; 1]$.
- Řešení
- Nejprve určíme normálový vektor této roviny. Ten vypočítáme jako vektorový součin vektorů AB a AC. AB = {-1; 1; 3}, AC = {-2; 2; 0},
  AB × AC = {-6; -6; 0}.
- Podle předcházející věty tento vektor určuje koeficienty a, b, c obecné rovnice roviny *ABC*. Ta pak vypadá následovně:
  $-6x - 6y + 0z + d = 0$.
- Zbývá dopočítat koeficient d. Ten získáme, dosadíme-li do rovnice souřadnice některého z bodů *A*, *B*, *C*. Pro jednoduchost zvolíme bod *C* a dojdeme k $d = 0$. Hledaná obecná rovnice má tvar:
  $-6x - 6y = 0$.
- Výslednou rovnici si snadno můžeme ověřit dosazením souřadnic bodů *A* a *B*.

Normála k ploše a vektor napětí

Plocha S určená rovnicí $f(x_1,x_2,x_3)=0$ má ve svém regulárním bodě $Q(x_{1q}, x_{2q}, x_{3q})$ normálový vektor

$$\bar{n}(Q)=\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\frac{\partial f}{\partial x_3}\right\}_Q^T \quad \left(\nabla f=\left\{\frac{\partial f}{\partial x_1}\bar{\mathrm{e}}_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\bar{\mathrm{e}}_2+\frac{\partial f}{\partial x_3}\bar{\mathrm{e}}_3\right\}\right)$$

nebo jeho (libovolný) nenulový násobek, normála plochy S v bodě Q je pak přímka, která prochází bodem Q a jejímž směrovým vektorem je normálový vektor plochy v daném bodě. Vektor normály je kolmý k tečné rovině plochy S vedené bodem Q.
Je-li ve speciálním případě plocha S rovinou o rovnici ax + by + cz + d = 0 , potom jejím normálovým vektorem (v kterémkoliv jejím bodě) je (a, b, c) a je to vektor kolmý k rovině S (která je sama sobě tečnou rovinou).

$$[\sigma]=\begin{bmatrix} x_1x_3 & x_3^2 & 0 \\ x_3^2 & 0 & -x_2 \\ 0 & -x_2 & 0 \end{bmatrix} \text{ v bode P(x}_i\text{), najdeme napetovy vektor v bode Q(1,0,-1) na plose}$$

$$f\left(x_1,x_2,x_3\right)\equiv x_1-x_2^2-x_3^2=0\Rightarrow \nabla f=\left\{1,-2x_2,-2x_3\right\}^T,\nabla f_Q=\left\{1,0,2\right\}^T,\left|\nabla f_Q\right|=\sqrt{5},\bar{n}_Q=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{Bmatrix}1\\0\\2\end{Bmatrix}.$$

$$[\sigma]_Q=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \{t\}_Q=[\sigma]_Q\{n\}_Q=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{Bmatrix}-1\\1\\0\end{Bmatrix},\ \text{velikost}\left|\{t\}_Q\right|=\sqrt{2/5}\,[Pa]$$

Příklad

$$\left[\sigma_{ij}\right]=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -5\\ 4 & -5 & 0\end{bmatrix}\quad [Pa] \text{ v bodě P.}$$

(a) v tomto bodě určete vektor napětí $\{t\}$, který působí na element plochy rovnoběžný s rovinou $2x_1+x_2-x_3=1$ a určete úhel mezi napěťovým vektorem a normálou k rovině.

Směrové kosíny normály k rovině: $\{n\}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{Bmatrix}2\\ 1\\ -1\end{Bmatrix}$, napěťový vektor $\{t\}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 1 & 2 & -5\\ 4 & -5 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}2\\ 1\\ -1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.2247\\ 3.6742\\ 1.2247\end{Bmatrix}[Pa]$.

Úhel θ mezi $\bar{n}$ a $\bar{t}$: $\bar{n}\bullet\bar{t}=|\bar{n}||\bar{t}|\cos\theta \Rightarrow \widehat{\theta}=1.056,\quad \theta=60.5^{o}$

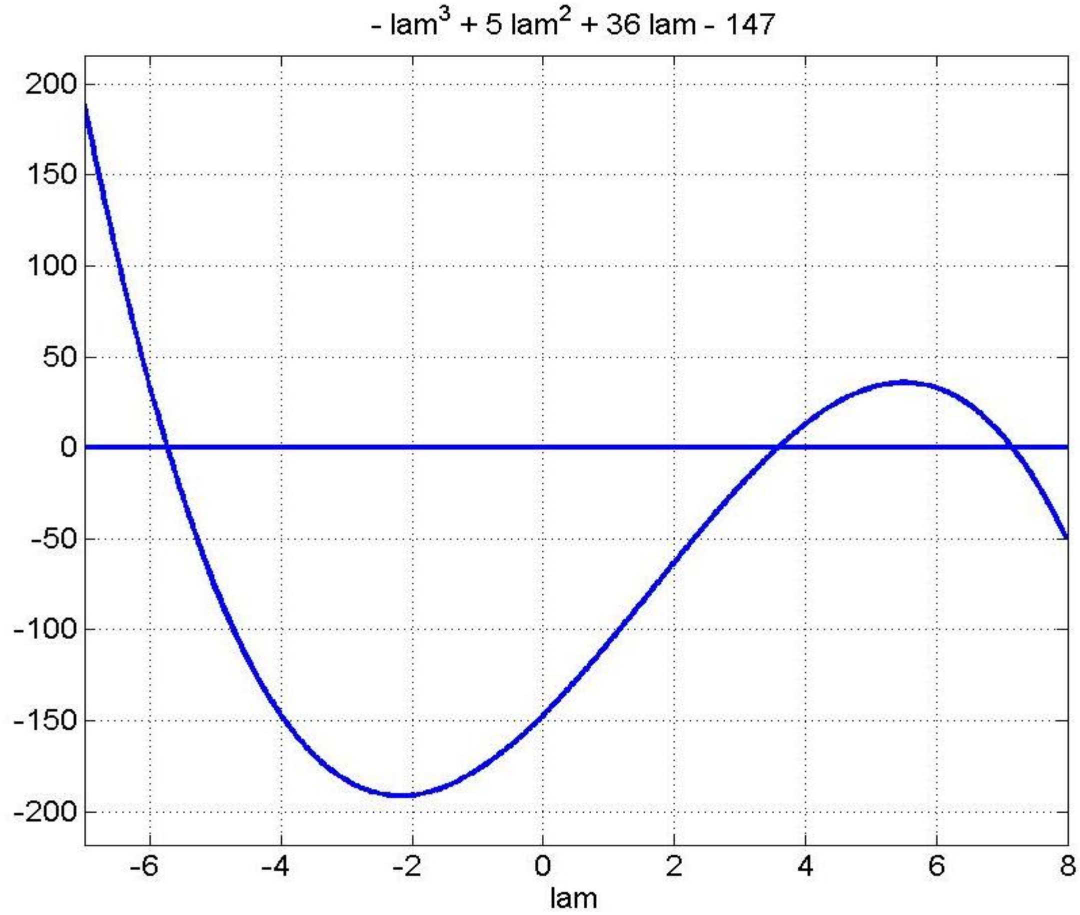
(b) určete normálné a smykové napětí v oktahedrické rovině jdoucí daným bodem. Oktahedrická rovina svírá se všemi osami stejný úhel $\alpha\Rightarrow\ 3\cos^2\alpha=1\Rightarrow\{n_{okt}\}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{Bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{Bmatrix}$. Napěťový vektor v okt. rovině $\{t_{okt}\}=[\sigma]\{n_{okt}\}=\begin{Bmatrix}4.6188\\ -1.1547\\ -0.5774\end{Bmatrix}[Pa]$;

$\sigma_{okt}=\{t_{okt}\}^T\{n_{okt}\}=1.6667[Pa]$, oktahedr. smykové napětí dopočítáme $\tau_{okt}=\sqrt{|\bar{t}_{okt}|^2-\sigma^2{}_{okt}}=4.4969[Pa]$.

(c) Určete hlavní napětí a hlavní směry:

Matlab: sig=[3 1 4;1 2 -5;4 -5 0]; [v,D]=eig(sig);

```
v =   -0.4018   -0.7615    0.5086        D =   -5.7382        0         0
       0.5330   -0.6461   -0.5463                    0    3.5776         0
       0.7446    0.0516    0.6655                    0         0    7.1606
```



Pomocí charakteristické rovnice a invariantu:

poly(sig) =

1.0000 -5.0000 -36.0000 147.0000

$lam = roots(poly(sig));$

$lam =$ -5.7382

7.1606

3.5776

- clear
- sig= [3 1 4; 1 2 -5; 4 -5 0] %matice tenzoru napeti
- %vypocet vlastnich vektoru a vlastnich cisel tj hlavnich napeti a hlav smeru
- % kosiny hlavnich smeru jsou ve sloupcich matice V
- [V LAM]=eig(sig);
- %vypocet pomoci charakterist.rovnice - radek koef. charakt polynomu od nejvyssi %mocniny
- char_rov=poly(sig)
- %vlastni cisla matice tenzoru napeti (hlavni napeti)
- lam=roots(poly(sig))
- %vlastni vektory
- I=eye(3); %jednotkova matice
- hlav_sm=[];
- for k=1:3
- A=sig-I*lam(k); % odecteni vlast cisla od diagonaly sig, matice A je singularni
- Z=null(A); %vypocet odpovidajiciho hlav. vektoru pomoci null
- %plati Z'*Z=1; A*Z = zanedb ~ 0 vektor
- hlav_sm=[hlav_sm Z];
- end

Okrajové podmínky pro tensor napětí

Cauchyho zakon $\{t\} = [\sigma]^T \{n\} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$ plati v kazdem bode

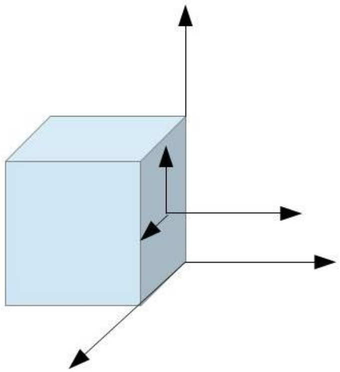
materialu a tedy i na povrchu (okraji) telesa. Na okraji tedy $\{t\}_{okr}$ representuje povrchove sily na jednotku plochy a $\{n\}_{okr}$ je vnejsi normala na povrchu telesa.

V pripade, ze na teleso v danem miste nepusobi zadne vnejsi sily $[\sigma]^T \{n\}_{okr} = \{0 \quad 0 \quad 0\}^T$.

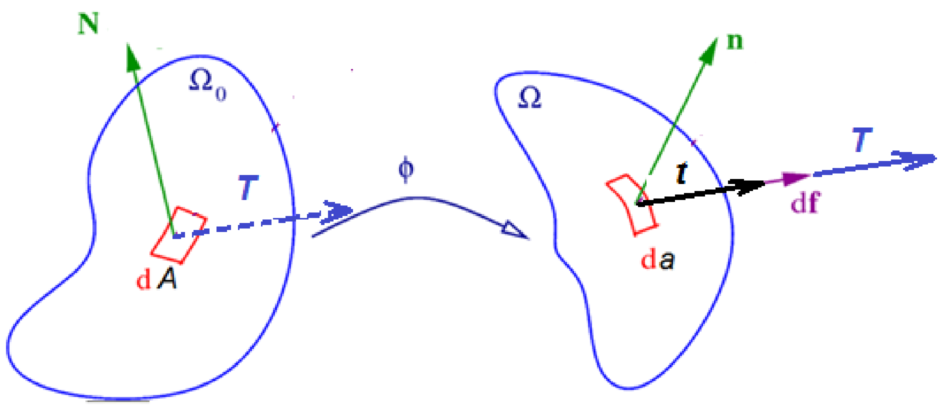
PRIKLAD: Okrajem telesa je rovina (x_2, x_3) s vnejsi normalou $\bar{e}_1$, tj. $\{n\}_{okr} = \{1 \quad 0 \quad 0\}^T$,

na rovinu pusobi tlak o velikosti $p \Rightarrow \{t\}_{okr} = p \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$. Pro tensor napeti plati: $[\sigma]^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = p \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$\sigma_{11} = -p, \sigma_{21} = 0, \sigma_{31} = 0$ na povrchu.



Cauchyho skutečné napětí a 1. Piola-Kirchhoffův nominální tenzor napětí



Cauchyho skutečné napětí $\boldsymbol{\sigma}$ působí na element plochy da v deformované konfig.

Výsledná síla v def. konfig. $d\mathbf{f} = \mathbf{t}da = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}da$, kde $\mathbf{t}(\mathbf{x},t,\mathbf{n})$ je Cauchyho skutečný napěťový vektor v def. konfig.

Výsledná síla v def. konfig. $d\mathbf{f} = \mathbf{T}dA$, kde $\mathbf{T}(\mathbf{X},t,\mathbf{N})$ je tzv. nominální napěťový vektor v nedef. konfig- též někdy první Piola-Kirchhoffův napěťový vektor.

$\mathbf{t}da = \mathbf{T}dA \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}da = \mathbf{T}dA.$

Definujeme první Piola-Kirchhoffův tenzor napětí, nebo též tenzor nominálního napětí $\mathbf{P}(\mathbf{X},t)$

$$\mathbf{P}(\mathbf{X},t)\mathbf{N} = \mathbf{T}(\mathbf{X},t,\mathbf{N}) \Rightarrow \mathbf{P}\left(\mathbf{X},t\right)\mathbf{N}dA = \mathbf{T}(\mathbf{X},t,\mathbf{N})dA \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}\left(\mathbf{X},t\right)\mathbf{N}dA = \boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{x},t\right)\mathbf{n}da,$$

pak pomocí Nansonova vztahu: $da\,\mathbf{n} = J\,dA\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}$

můžeme vyjádřit $\mathbf{P} = J\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$ a tedy i $\boldsymbol{\sigma} = J^{-1}\mathbf{P}\mathbf{F}^{T} = \boldsymbol{\sigma}^{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{P}\mathbf{F}^{T} = \mathbf{F}\mathbf{P}^{T}$

tj. první P - K napěťový tenzor není symetrický a má tedy 9 nezávislých složek.

Příklad: Deformace tělesa je popsána vztahy $x_1=-6X_2$, $x_2=1/2X_1$, $x_3=1/3X_3$. Cauchyho tenzor napětí má jedinou nenulovou složku σ_{22}=50MPa, normála v deformované konfiguraci je **n**=**e**$_2$. Určete Cauchyho napěťový vektor **t**, Piola-Kirch. vektor napětí **T** a první P-K napěťový tenzor **P**.

```
>> F=[0 -6 0;.5 0 0;0 0 1/3]
F =   0   -6.0000       0
   0.5000       0       0
       0        0   0.3333
>> sig=[0 0 0;0 50 0;0 0 0]
sig = 0    0    0
      0   50    0
      0    0    0
>> n=[0;1;0]
n =    0
       1
       0
>> J=det(F)
J =    1
>> P=J*sig*(inv(F))'
P =    0    0    0
     100    0    0
       0    0    0
```

```
>> Nanson=J^-1*F'*n
Nanson =    0.5000
                 0
                 0
```

tj. **N**=**e**$_1$;

```
>> N=[1;0;0]
N =    1
       0
       0
>> T=P*N
T =    0
     100
       0
>> t=sig*n
t =    0
      50
       0
```

Nansonova formule

$$da\, J^{-1}\mathbf{F}^T\mathbf{n} = dA\,\mathbf{N},$$

$$da\,\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix} = dA\begin{Bmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{Bmatrix},$$

$$da\,\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix} = dA\begin{Bmatrix}1\\0\\0\end{Bmatrix},$$

$$da = 2dA.$$

Napěťové vektory **t** a **T** mají stejný směr, velikost **T** je 2x větší, než velikost **t**, neboť deformovaná plocha *da* je 2x větší než nedeformovaná plocha *dA*.

Příklad: v souřadném systému x_1, x_2, x_3 s bázovými vektory $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ jsou složky Cauchyho tenzoru napětí dány v matici $[\sigma]$, určete složky tenzoru napětí v nové ortonormální bázi s bázovými vektory $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$.

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} [MPa], \quad \mathbf{e}_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3), \mathbf{e}_3^* = \frac{1}{3}(2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3).$$

$\mathbf{e}_2^*$ =[0.7071 0 -0.7071]^T,
$\mathbf{e}_3^*$ =[0.6667 -0.3333 0.6667]^T.
$\mathbf{e}_1^*$ =$\mathbf{e}_2^*$ x $\mathbf{e}_3^*$
$\mathbf{e}_1^*$ =[-0.2357 -0.9428 -0.2357]^T.

Projekce tenzoru druhého řádu $\tilde{\mathbf{A}}$ na ortonormální bázi vektorů $\mathbf{e}_i$

$$A_{ij} = \mathbf{e}_i \bullet \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{e}_j.$$

Vektory $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$ uspořádáme do ortonormální matice:

```
>> E=[e1 e2 e3];
>> new_sig=E'*sig*E

new_sig(i,j)=
   1.7778   -2.3333   -2.1999
  -2.3333    4.0000   -1.8856
  -2.1999   -1.8856   -1.7778
```

Alternativní tenzory napětí

První Piola-Kirchhoffův tenzor napětí $\mathbf{P} = \mathrm{J}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T}$

Kirchhoffův tenzor napětí - hlavně v plasticitě, je v prostorovém popisu $\boldsymbol{\tau}=J\boldsymbol{\sigma}$.

Druhý Piola-Kirchhoffův tenzor napětí **S** ve výpočtové mechanice a v konstitutivních rovnicích. Je v materiálovém popisu

$\mathbf{S}=\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathbf{F}^{-T} = J\mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} = \mathbf{S}^{T}.$

Biotův tenzor napětí - nesymetrický, v materiálovém popisu

$\mathbf{T}_B = \mathbf{R}^T\mathbf{P},$ kde $\mathbf{R}$ je matice rotace $\mathbf{F}=\mathbf{R}\mathbf{U},$ a tedy $\mathbf{T}_B = \mathbf{R}^T\mathbf{F}\mathbf{S} = \mathbf{U}\mathbf{S}.$

Tenzory v intermediální konfiguraci:

Korotovaný Cauchyho tenzor napětí $\boldsymbol{\sigma}_U = J^{-1}\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{U} = \left(\mathbf{U}\mathbf{F}^{-1}\right)\boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{F}^{-T}\mathbf{U}\right) = \mathbf{R}^T\sigma\mathbf{R}.$

Mandelův tenzor napětí $\boldsymbol{\Sigma}=\mathbf{C}\mathbf{S}$ pro neelastické maateriály.