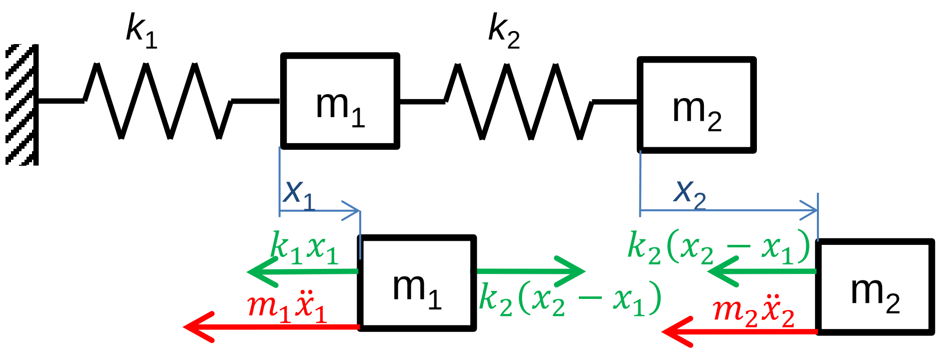
KMS – cvičení 6

Ondřej Marek

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

NETLUMENÝ PODDAJNÝ SYSTÉM S 2DOF – analytické řešení



Systém se 2 stupni volnosti popisují 2 pohybové rovnice:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$$
$$m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + k_2 x_2 = 0$$

pohybové rovnice zapsané maticově

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \mathbf{K}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Díky zkušeností z řešení 1DOF systému lze odhadnout tvar homogenního řešení jako:

$$x_{1h} = r_1 \sin(\Omega t + \varphi_{01})$$
$$x_{2h} = r_2 \sin(\Omega t + \varphi_{02})$$

$$\ddot{x}_{1h} = -\Omega^2 r_1 \sin(\Omega t + \varphi_{01}) = -\Omega^2 x_{1h}$$
$$\ddot{x}_{2h} = -\Omega^2 r_2 \sin(\Omega t + \varphi_{02}) = -\Omega^2 x_{2h}$$

dosazení do pohybových rovnic:

$$-m_1 \Omega^2 x_{1h} + (k_1 + k_2)x_{1h} - k_2 x_{2h} = 0$$
$$-m_2 \Omega^2 x_{2h} - k_2 x_{1h} + k_2 x_{2h} = 0$$

$$(k_1 + k_2 - m_1 \Omega^2)x_{1h} - k_2 x_{2h} = 0$$
$$-k_2 x_{1h} + (k_2 - m_2 \Omega^2)x_{2h} = 0$$

Soustava homogenních rovnic $\boldsymbol{AX} = \mathbf{0}$ má buď nulové řešení nebo v případě singulární matice ***A*** nekonečně mnoho řešení.

$$\det \mathbf{A} = 0$$
$$(k_1 + k_2 - m_1 \Omega^2)(k_2 - m_2 \Omega^2) - k_2^2 = 0$$
$$m_1 m_2 \Omega^4 - \Omega^2 (m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)) + k_1 k_2 = 0$$
$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{k_2}{2m_2} + \frac{k_1 + k_2}{2m_1} \mp \sqrt{\frac{k_2^2}{4m_2^2} + \frac{k_2^2 - k_1 k_2}{2m_1 m_2} + \frac{k_1^2 + 2k_1 k_2 + k_2^2}{4m_1^2}}$$

Pokud dvojhmotový systém vypadá takto:

$m_1 = m_2 = m$ $\qquad$ $k_1 = 2k,\ k_2 = k$

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{k}{m}(2 \mp \sqrt{2})$$

$$\Omega_{1,2} = \pm\sqrt{k/m}\sqrt{2 \mp \sqrt{2}}$$

Vlastní frekvence se řadí vzestupně, proto $\Omega_1 < \Omega_2$

NETLUMENÝ PODDAJNÝ SYSTÉM S 2DOF (2)

pokud je tedy **A** singulární pro dvě různé hodnoty Ω, tj Ω_1 a Ω_2 a platí:

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$$

a pro dvě různé Ω vyjdou dva vektory ***a**, tj.* $\boldsymbol{a_1}$ a $\boldsymbol{a_2}$.

$$\begin{bmatrix} 3k - m\Omega_i^2 & -k \\ -k & k - m\Omega_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

X je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a_1}$ a $\boldsymbol{a_2}$.

$$\mathbf{X} = q_1 \boldsymbol{a_1} + q_2 \boldsymbol{a_2}$$

Univerzálnější postup, který lze použít i pro tlumenou soustavu

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \mathbf{K}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

odhad

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \cdot e^{\lambda t}$$
$$\ddot{\boldsymbol{x}} = \lambda^2 \boldsymbol{c} \cdot e^{\lambda t}$$

$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K})\boldsymbol{c}e^{\lambda t} = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K})\boldsymbol{c} = \mathbf{0}$$

když

$$(\mathbf{M}\lambda^2 + \mathbf{K}) = \mathbf{A}$$
$$\boldsymbol{c} = \alpha \boldsymbol{a}$$

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$$
$$\det \mathbf{A} = 0$$
$$\det \begin{bmatrix} m_1\lambda^2 + k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & m_2\lambda^2 + k_{22} \end{bmatrix} = 0$$
$$\lambda^4 \cdot m_1 m_2 + \lambda^2(m_1 k_{22} + m_2 k_{11}) + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 0$$

$$\lambda_{1,2}^2 = -\frac{k_{11}}{2m_1} - \frac{k_{22}}{2m_2} \pm \sqrt{\frac{k_{11}^2}{4m_1^2} + \frac{k_{22}^2}{4m_2^2} + \frac{2k_{12}k_{21} - k_{11}k_{22}}{2m_1 m_2}}$$

aplikováno na příklad

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{k}{m}(-2 \pm \sqrt{2})$$
$$\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{k/m}\sqrt{2 \mp \sqrt{2}}$$

Tohle jsou pravá vlastní čísla, pro netlumený systém vycházejí pouze komplexní části (vždy 2 čísla jsou komplexně sdružená)

Vlastní vektory

Pro $\Omega = \Omega_1$ lze psát

$$-ka_{11} + (k - m\Omega_1^2)a_{12} = 0$$

$$a_{11} = \frac{k - m\Omega_1^2}{k} a_{12}$$

Pokud zvolíme a_{12}=1, pak

$$a_{11} = \frac{k - m\Omega_1^2}{k} = \frac{k - k\left(2 - \sqrt{2}\right)}{k} = \sqrt{2} - 1$$

$$\boldsymbol{a_1} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.41 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pro $\Omega = \Omega_2$ lze psát podobná rovnice

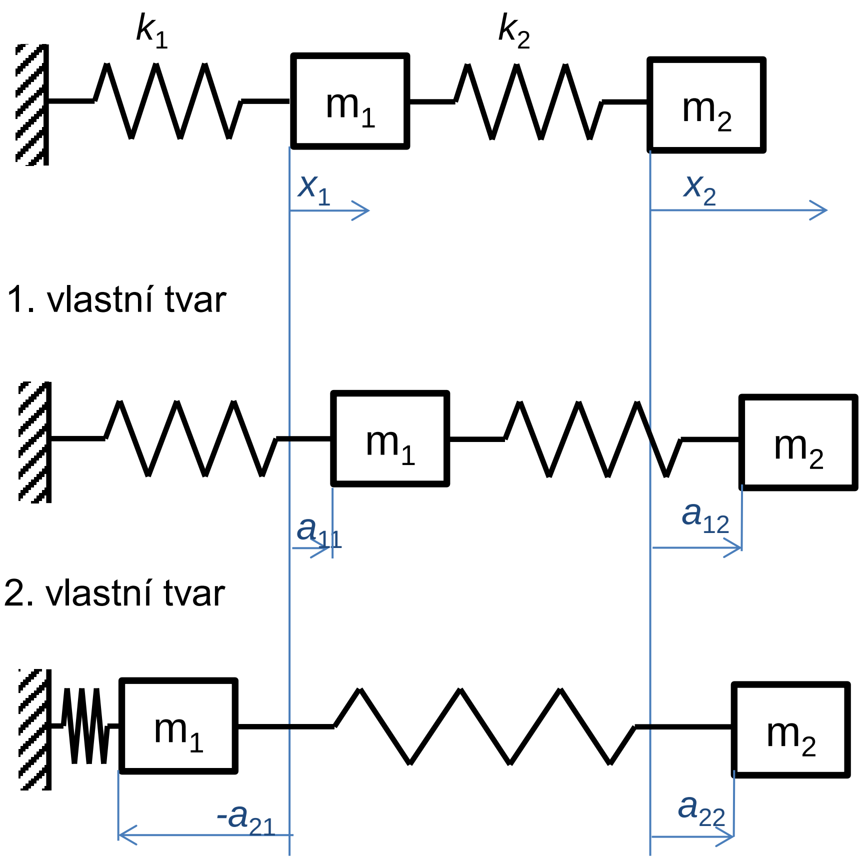
$$a_{21} = \frac{k - m\Omega_2^2}{k} a_{22}$$

Pokud zvolíme a_{22}=1, pak

$$a_{21} = \frac{k - m\Omega_2^2}{k} = \frac{k - k\left(2 + \sqrt{2}\right)}{k} = -\sqrt{2} - 1$$

$$\boldsymbol{a_2} = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.41 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Rovnovážná poloha

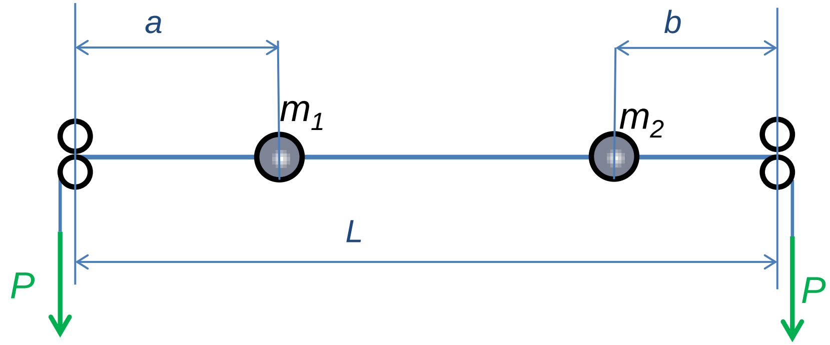


Příklad 2 DOF – struna (2)

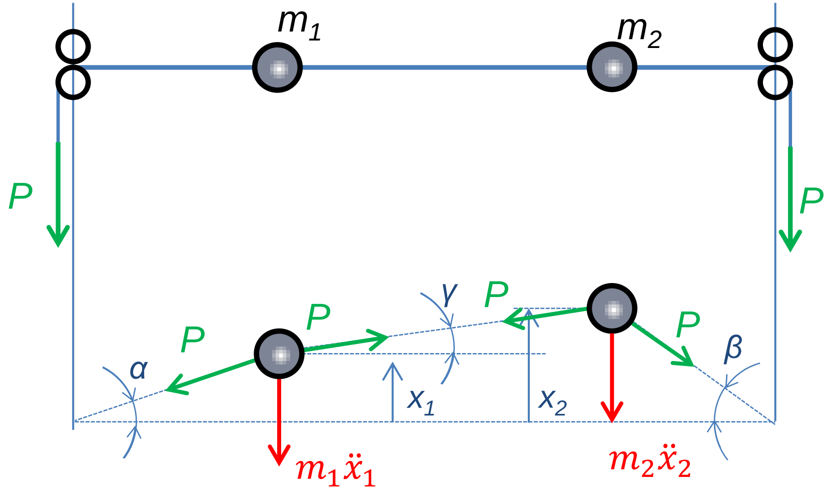
Příklad: Dvě hmoty s hmotností m_1 a m_2 upevněné na předepnuté struně délky L se chovají jako poddajná soustava se dvěma stupni volnosti. Určete vlastní frekvence netlumeného systému a vlastní tvary.

L=1m; a=0,2m; b=0,4m

m_1=1kg; m_2=2kg; P=100N



Uvolnění:



Pohybové rovnice:

$$m_1\ddot{x}_1 + P\sin\alpha - P\sin\gamma = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + P\sin\gamma + P\sin\beta = 0$$

rovnice jsou nelineární, ale pro malé výchylky lze linearizovat

$$\sin\alpha \doteq \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x_1}{a}$$
$$\sin\beta \doteq \mathrm{tg}\,\beta = \frac{x_2}{b}$$
$$\sin\gamma \doteq \mathrm{tg}\,\gamma = \frac{x_2 - x_1}{L - (a+b)}$$

Příklad 2 DOF – struna (2)

Linearizované pohybové rovnice:

$$m_1\ddot{x}_1 + P\frac{x_1}{a} - P\frac{x_2 - x_1}{L-(a+b)} = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 + P\frac{x_2 - x_1}{L-(a+b)} + P\frac{x_2}{b} = 0$$

po úpravě:

$$m_1\ddot{x}_1 + \left(\frac{P}{a} + \frac{P}{L-(a+b)}\right)x_1 - \frac{P}{L-(a+b)}x_2 = 0$$
$$m_2\ddot{x}_2 - \frac{P}{L-(a+b)}x_1 + \left(\frac{P}{b} + \frac{P}{L-(a+b)}\right)x_1 = 0$$

Maticový zápis:

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \mathbf{K}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{P}{a} + \frac{P}{L-(a+b)} & -\frac{P}{L-(a+b)} \\ -\frac{P}{L-(a+b)} & \frac{P}{b} + \frac{P}{L-(a+b)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 750 & -250 \\ -250 & 500 \end{bmatrix}$$

Příklad - vlastní frekvence

frekvenční determinant
$det(\boldsymbol{K} - \Omega^2 \boldsymbol{M}) = 0$

substituce λ = Ω²
$$det \begin{bmatrix} 750 - 1 \cdot \lambda & -250 \\ -250 & 500 - 2 \cdot \lambda \end{bmatrix} = 0$$
$$(750 - \lambda)(500 - 2\lambda) - 250^2 = 0$$
$$2\lambda^2 - 2000\lambda + 312500 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2000 \mp \sqrt{4 \cdot 10^6 - 4 \cdot 2 \cdot 312500}}{4} = 500 \mp 306.2$$
$$\lambda_1 = 193.8$$
$$\lambda_2 = 806.2$$

$\Omega_1 = 13.9\, rad/s$ $\qquad f_1 = 2.2\, Hz$

$\Omega_2 = 28.4\, rad/s$ $\qquad f_2 = 4.5\, Hz$

Modální matice:
$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 193.8 & 0 \\ 0 & 806.2 \end{bmatrix}$$

TKMOST

Vlastní vektory, normované vlastní vektory

Pro $\Omega = \Omega_1$ ($\lambda = \lambda_1$) lze psát

$$(750 - \lambda_1)a_{11} - 250a_{12} = 0$$
$$a_{12} = \frac{750 - \lambda_1}{250} a_{11} = 2.2247a_{11}$$

Pokud zvolíme a_{11}=1, pak

$$a_{12} = 2.2247$$
$$\boldsymbol{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2.2247 \end{bmatrix}$$

Pro $\Omega = \Omega_2$ lze psát podobná rovnice

$$(750 - 2\lambda_2)a_{21} - 250a_{22} = 0$$
$$a_{22} = \frac{750 - 2\lambda_2}{250} a_{21} = -0.2247a_{21}$$

Pokud zvolíme a_{21}=1, pak

$$a_{12} = -0.2247$$
$$\boldsymbol{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.2247 \end{bmatrix}$$

Vlastní vektory $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ nejsou normované. Normují se s vahou **M** kvůli podmínce ortogonality (bude vysvětleno později)
Pokud se označí normované vektoru jako $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{u}_2$ (obecně $\mathbf{u}_i$), lze je zapsat do matice **U**, která se nazývá *modální matice*

$$\mathbf{U} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_n]$$

Požadavek normy s vahou M je:

$$\boldsymbol{u}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{u}_i = 1$$

neboli maticově

$$\mathbf{U}^\mathrm{T}\mathbf{M}\mathbf{U} = \mathbf{I}$$

Pokud

$$\boldsymbol{u}_i = \alpha_i \boldsymbol{a}_i$$
$$\boldsymbol{u}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{u}_i = \alpha_i \boldsymbol{a}_i^T \mathbf{M} \alpha_i \boldsymbol{a}_i = 1$$
$$\alpha_i^2 = \frac{1}{\boldsymbol{a}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{a}_i}$$

$$\boldsymbol{u}_i = \frac{\boldsymbol{a}_i}{\sqrt{\boldsymbol{a}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{a}_i}}$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\sqrt{\boldsymbol{a}_1^T \mathbf{M} \boldsymbol{a}_1}} = 0.3029\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} 0.3029 \\ 0.6739 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2}{\sqrt{\boldsymbol{a}_2^T \mathbf{M} \boldsymbol{a}_2}} = 0.9530\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} 0.9530 \\ -0.2142 \end{bmatrix}$$

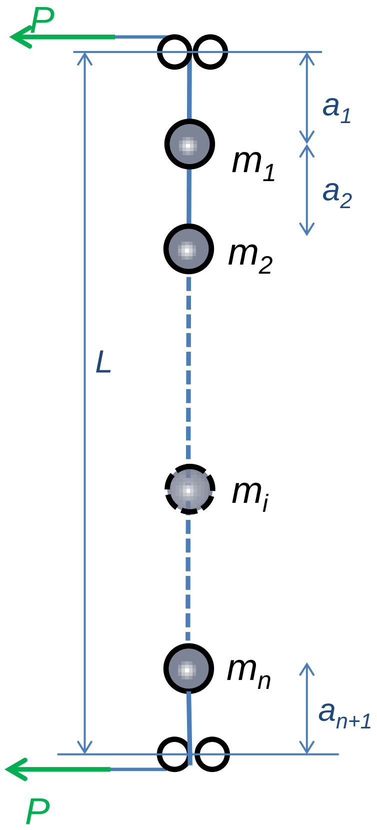
modální matice:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.3029 & 0.9530 \\ 0.6739 & -0.2142 \end{bmatrix}$$

NETLUMENÝ PODDAJNÝ SYSTÉM S n DOF

Příklad: Předepnutá hmotná struna s hmotností m_s délky L se chová jako poddajná soustava. Diskretizujte kontinuum dle obrázku na soustavu s r stupni volnosti a určete vlastní frekvence systému a vlastní tvary.

L=1m; r=5; m_s=0.2kg; P=100N



Pro rovnoměrné rozložení hmoty

$$m_1 = m_2 = m_i = m_n = \frac{m_s}{r} = m$$

$$a_1 = a_2 = a_i = a_{n+1} = \frac{L}{r+1} = a$$

Z minulého příkladu s 2 DOF lze vypozorovat, že tuhost „pružiny“ mezi sousedními hmotami m_i a m_{i+1} je rovna:

$$k_i = \frac{P}{a_i}$$

Pohybové rovnice:

$$m\ddot{x}_1 + \frac{2P}{a}x_1 - \frac{P}{a}x_2 = 0$$

...

$$m\ddot{x}_i - \frac{P}{a}x_{i-1} + \frac{2P}{a}x_i - \frac{P}{a}x_{i+1} = 0$$

...

$$m\ddot{x}_n - \frac{P}{a}x_{n-1} + \frac{2P}{a}x_n = 0$$

SYSTÉM S n DOF – pohybové rovnice

Maticový zápis pro 5DOF (r=5)

$$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \mathbf{K}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0.04 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{2P}{a} & -\frac{P}{a} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{P}{a} & \frac{2P}{a} & -\frac{P}{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{P}{a} & \frac{2P}{a} & -\frac{P}{a} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{P}{a} & \frac{2P}{a} & -\frac{P}{a} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{P}{a} & \frac{2P}{a} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1200 & -600 & 0 & 0 & 0 \\ -600 & 1200 & -600 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & 1200 & -600 & 0 \\ 0 & 0 & -600 & 1200 & -600 \\ 0 & 0 & 0 & -600 & 1200 \end{bmatrix}$$

SYSTÉM S n DOF – vlastní čísla a vlastní tvary

Vlastní čísla (spektrální matice **Λ**), vlastní frekvence (matice **Ω**)

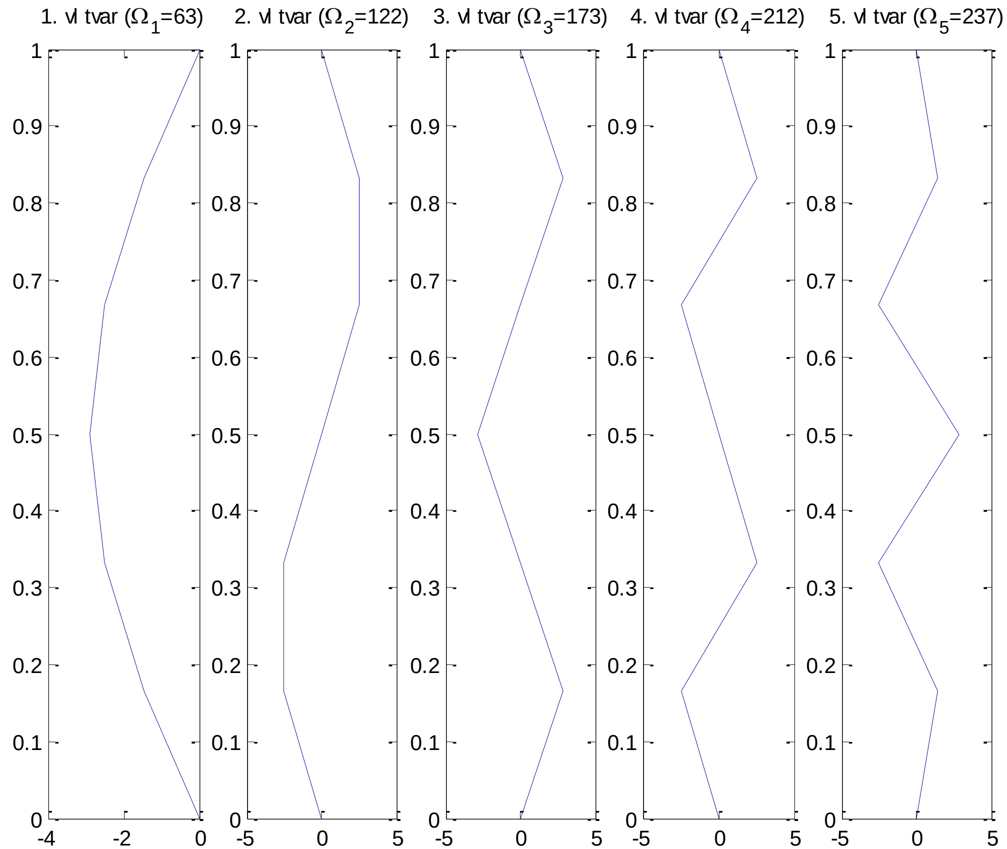
$$det(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) = 0$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 4019 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 30000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 45000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 55981 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 63.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 122 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 173 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 212 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 237 \end{bmatrix}$$

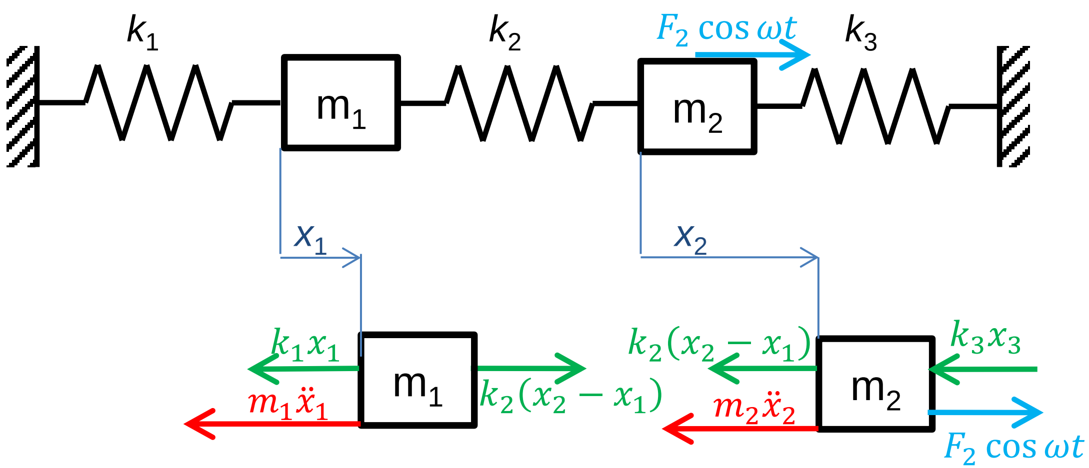
Vlastní tvary (modální matice **U**)

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -1.4434 & -2.5000 & 2.8868 & -2.5000 & 1.4434 \\ -2.5000 & -2.5000 & 0 & 2.5000 & -2.5000 \\ -2.8868 & 0 & -2.8868 & 0 & 2.8868 \\ -2.5000 & 2.5000 & 0 & -2.5000 & -2.5000 \\ -1.4434 & 2.5000 & 2.8868 & 2.5000 & 1.4434 \end{bmatrix}$$



NETLUMENÝ PODDAJNÝ SYSTÉM S 2 DOF – maticové řešení

Příklad:
Poddajná soustava dle obrázku je buzena harmonickou silou



m1= 1kg
m2 = 4kg
k1=0,5 N/m
k2=1 N/m
k3=5 N/m
F_2=0,1N
ω=1,4 rad/s

p.p.
x_{01}=0,2m, x_{02}=−0,5m, v_{01}=0,5m/s, v_{02}=0,1m/s

Pohybové rovnice:
$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0$
$m_2\ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = F_2 \cos \omega t$

Maticový zápis:
$\mathbf{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + \mathbf{K}\boldsymbol{x} = \mathbf{F}$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = Re\left(\widehat{\boldsymbol{F}} e^{i\omega t}\right)$$
$$\mathbf{F} = \mathbf{F_s} \sin \omega t + \mathbf{F_c} \cos \omega t$$
$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \cos \omega t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin \omega t + \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \end{bmatrix} \cos \omega t$$

Příklad 2 DOF- vlastní frekvence

frekvenční determinant

$det(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}) = 0$

$$\det\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - \Omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 - \Omega^2 m_2 \end{bmatrix} = 0$$

$(k_1 + k_2 - \lambda m_1)(k_2 + k_3 - \lambda m_2) - k_2^2 = 0$

$\Omega^4(m_1 m_2) + \Omega^2(-m_1 k_2 - m_1 k_3 - m_2 k_1 - m_2 k_2) + k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 = 0$

Po dosazení

$4\Omega^4 - 12\Omega^2 + 8 = 0$

$$\Omega^2 = \frac{12 \mp \sqrt{144 - 4 \cdot 4 \cdot 8}}{8} = \frac{3}{2} \mp \frac{1}{2}$$

$$\Omega_{1,2,3,4}^2 = \pm\sqrt{\frac{3}{2} \mp \frac{1}{2}}$$

Matematicky správné by bylo řešení se čtyřmi Ω, ale jelikož by vycházely dva vlastní vektory vždy stejné, uvažují se pouze kladné Ω a řadí se od nejmenší po největší ($\Omega_1 < \Omega_2$)

$\Omega_1 = 1\, rad/s$

$\Omega_2 = \sqrt{2}\, rad/s$

Spektrální matice:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \Omega_1^2 & 0 \\ 0 & \Omega_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Příklad 2 DOF – vlastní vektory

Pro $\Omega = \Omega_1$ lze psát

$$(1.5 - \Omega_1^2)a_{11} - a_{12} = 0$$
$$a_{12} = (1.5 - 1)a_{11} = 0.5a_{11}$$

Pokud zvolíme a_{11}=2, pak

$$a_{12} = 1$$
$$\boldsymbol{a_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Pro $\Omega = \Omega_2$ lze psát podobná rovnice

$$(1.5 - \Omega_2^2)a_{21} - a_{22} = 0$$
$$a_{22} = (1.5 - 2)a_{21} = -0.5a_{21}$$

Pokud zvolíme a_{21}=2, pak

$$a_{12} = -1$$
$$\boldsymbol{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Vlastní vektory $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ nejsou normované. Normují se s vahou **M**. Pokud se označí normované vektory jako $\mathbf{u}_1$ a $\mathbf{u}_2$, lze je zapsat do modální matice ***U***

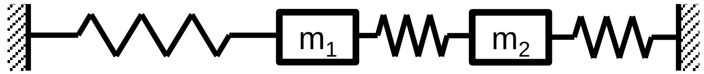
$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2]$$

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\sqrt{\boldsymbol{a}_1^T \mathbf{M} \boldsymbol{a}_1}} = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\sqrt{\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}}} = \frac{\boldsymbol{a}_1}{\sqrt{8}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

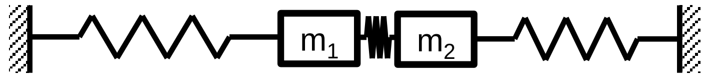
$$\mathbf{u}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_2}{\sqrt{\boldsymbol{a}_2^T \mathbf{M} \boldsymbol{a}_2}} = \frac{\boldsymbol{a}_2}{\sqrt{\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}} = \frac{\boldsymbol{a}_2}{\sqrt{8}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

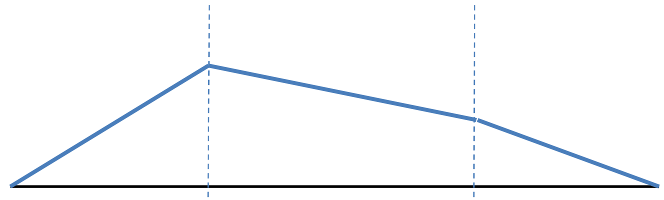
1. vlastní tvar



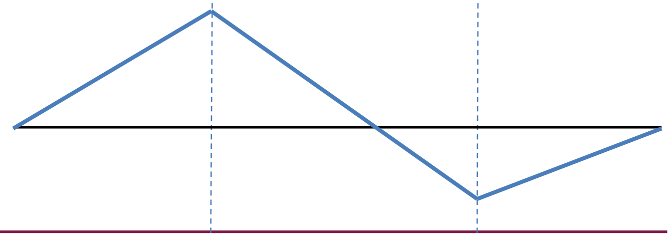
2. vlastní tvar



1. vlastní tvar



2. vlastní tvar



TKMOST

Příklad 2 DOF – volné kmitání

Řešení se očekává ve tvaru:

$$\boldsymbol{x_H}(t) = C_1\boldsymbol{u_1}\sin(\Omega_1 t + \varphi_{01}) + C_2\boldsymbol{u_2}\sin(\Omega_2 t + \varphi_{02})$$

pro počáteční podmínky se dosazením za t=0 získají 4 rovnice :

$$\boldsymbol{x_0} = C_1\boldsymbol{u_1}\sin\varphi_{01} + C_2\boldsymbol{u_2}\sin\varphi_{02}$$
$$\boldsymbol{v_0} = C_1\boldsymbol{u_1}\Omega_1\cos\varphi_{01} + C_2\boldsymbol{u_2}\,\Omega_2\cos\varphi_{02}$$

pro 4 neznámé C_1, C_2, φ_{01} a φ_{02}

zavedením:

$$C_1\sin\varphi_{01} = Z_1$$
$$C_2\sin\varphi_{02} = Z_2$$
$$C_1\cos\varphi_{01} = Z_3$$
$$C_2\cos\varphi_{02} = Z_4$$

se získají 4 rovnice pro 4 neznámé $Z_1..Z_4$ ve tvaru

$$\boldsymbol{x_0} = Z_1\boldsymbol{u_1} + Z_2\boldsymbol{u_2}$$
$$\boldsymbol{v_0} = Z_3\Omega_1\boldsymbol{u_1} + Z_4\Omega_2\boldsymbol{u_2}$$

a po dosazení

$$\begin{bmatrix}0.2\\-0.5\end{bmatrix} = Z_1\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0.5\end{bmatrix} + Z_2\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-0.5\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}0.5\\0.1\end{bmatrix} = Z_3\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0.5\end{bmatrix} + Z_4\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-0.5\end{bmatrix}$$

Maticová forma rovnic pro $Z_1..Z_4$

$$\begin{bmatrix}0.7071 & 0.7071 & 0 & 0\\ 0.3536 & -0.3536 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.7071 & 1\\ 0 & 0 & 0.3536 & -0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\C_2\\C_3\\C_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0.2\\-0.5\\0.5\\0.1\end{bmatrix}$$

$$Z_1 = -0.5657$$
$$Z_2 = 0.8485$$
$$Z_3 = 0.4950$$
$$Z_4 = 0.1500$$

Pozor, $Z_1..Z_4$ jsou spočteny pro stav v čase t=0! Z_1 a Z_2 jsou vlastně modální souřadnice v čase 0.

Dopočtení konstant C_1, C_2, φ_{01} a φ_{02}

$$\mathrm{tg}\,\varphi_{01} = \frac{Z_1}{Z_3}$$
$$\mathrm{tg}\,\varphi_{02} = \frac{Z_2}{Z_4}$$
$$C_1 = \frac{Z_1}{\sin\varphi_{01}};\qquad C_2 = \frac{Z_2}{\sin\varphi_{02}}$$

$$\varphi_{01} = -0{,}8520\,rad$$
$$\varphi_{02} = 1{,}3958\,rad$$
$$C_1 = 0{,}7517\,m$$
$$C_2 = 0{,}8617\,m$$

Příklad – homogenní řešení

$$\boxed{\mathbf{x_H}(t) = C_1\mathbf{u_1}\sin(\Omega_1 t + \varphi_{01}) + C_2\mathbf{u_2}\sin(\Omega_2 t + \varphi_{02})}$$

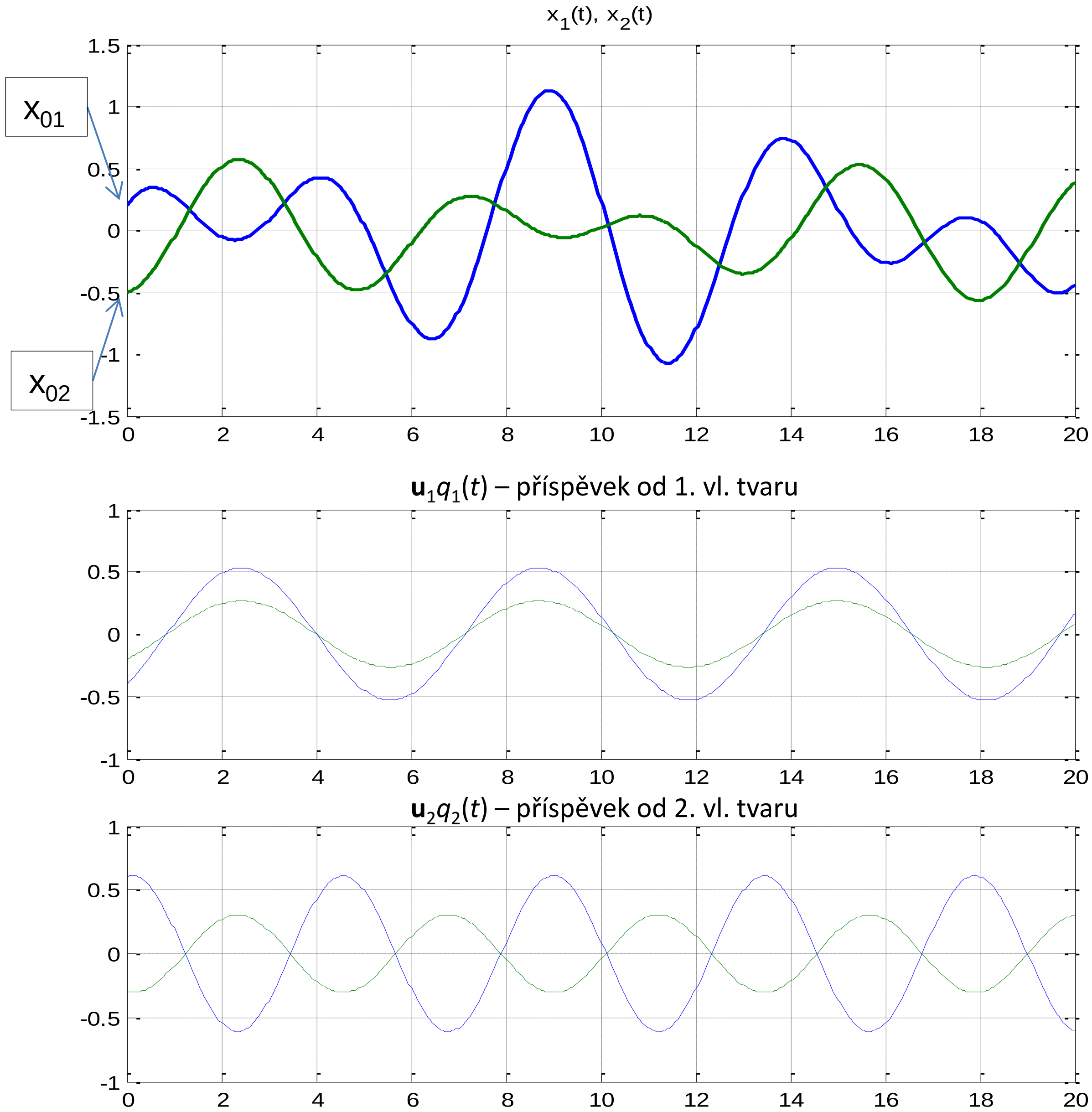
$$\begin{bmatrix} x_{1H}(t) \\ x_{2H}(t) \end{bmatrix} = 0.7517 \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.3536 \end{bmatrix} \sin(t - 0{,}852) + 0.8617 \begin{bmatrix} 0.7071 \\ -0.3536 \end{bmatrix} \sin(1.41t + 1{,}3958)$$

$$\begin{bmatrix} x_{1H}(t) \\ x_{2H}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5315 \\ 0.2658 \end{bmatrix} \sin(t - 0{,}852) + \begin{bmatrix} 0.6093 \\ -0.3047 \end{bmatrix} \sin(1.41t + 1{,}3958)$$

$$\mathbf{x_H}(t) = \mathbf{u_1} C_1\sin(\Omega_1 t + \varphi_{01}) + \mathbf{u_2} C_2\sin(\Omega_2 t + \varphi_{02})$$
$$\mathbf{x_H}(t) = \mathbf{u_1} q_1(t) + \mathbf{u_2} q_2(t)$$
$$\mathbf{x_H}(t) = [\mathbf{u_1} \quad \mathbf{u_2}] \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{q}(t)$$

$q_i(t)$, $\mathbf{q}(t)$ ... modální souřadnice, vektor modálních souřadnic

$$\mathbf{x_H} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} C_1\sin(\Omega_1 t + \varphi_{01}) \\ C_2\sin(\Omega_2 t + \varphi_{02}) \end{bmatrix}$$



Příklad – vynucené kmitání – přímé řešení

Harmonické buzení pro netlumený systém:
$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{0} e^{i\omega t}$
odhad:
$\mathbf{x}_\mathbf{P} = \hat{\mathbf{r}} e^{i\omega t}$ ...obecně je $\hat{\mathbf{r}}$ komplexní
$\ddot{\mathbf{x}}_\mathbf{P} = -\hat{\mathbf{r}}\omega^2 e^{i\omega t}$

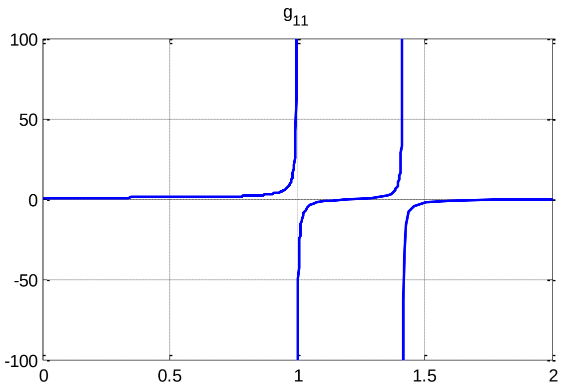
po dosazení:
$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{0}$
matice dynamické tuhosti $\mathbf{R} = (\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})$ je v případě netlumeného systému reálná, tudíž amplituda $\hat{\mathbf{r}}$ je reálné číslo pokud $\hat{\mathbf{f}}_\mathbf{0}$ je reálné č.

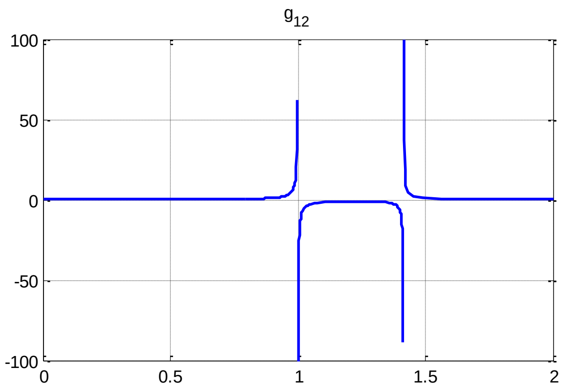
$\mathbf{R}\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{f}}_\mathbf{0}$
$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{R}^{-1}\hat{\mathbf{f}}_\mathbf{0} = \mathbf{G}\hat{\mathbf{f}}_\mathbf{0}$

G je matice dynamické poddajnosti a její prvky g_{jl} vyjadřují amplitudy vynucených výchylek v místě *j* od jednotkové harmonické síly v místě *l*

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1.5 - \omega^2 & -1 \\ -1 & 6 - 4\omega^2 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{G} = \mathbf{R}^{-1} = \frac{\operatorname{adj}\mathbf{R}}{\det\mathbf{R}} = \frac{1}{4\omega^2 - 12\omega + 8}\begin{bmatrix} 6 - 4\omega^2 & 1 \\ 1 & 1.5 - \omega^2 \end{bmatrix}$$

$$g_{11} = \frac{6 - 4\omega^2}{4(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 2)} = \frac{1.5 - \omega^2}{(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 2)}$$
$$g_{12} = g_{21} = \frac{1}{4(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 2)}$$
$$g_{22} = \frac{1.5 - \omega^2}{4(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 2)}$$





Příklad – amplitudy vynucených kmitů

$$\mathbf{r} = \mathbf{G}\mathbf{f_0}$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{12}F_2 \\ g_{22}F_2 \end{bmatrix}$$

$$r_1(\omega) = \frac{F_2}{4(\omega^2-1)(\omega^2-2)} = \frac{0.025}{(\omega^2-1)(\omega^2-2)}$$

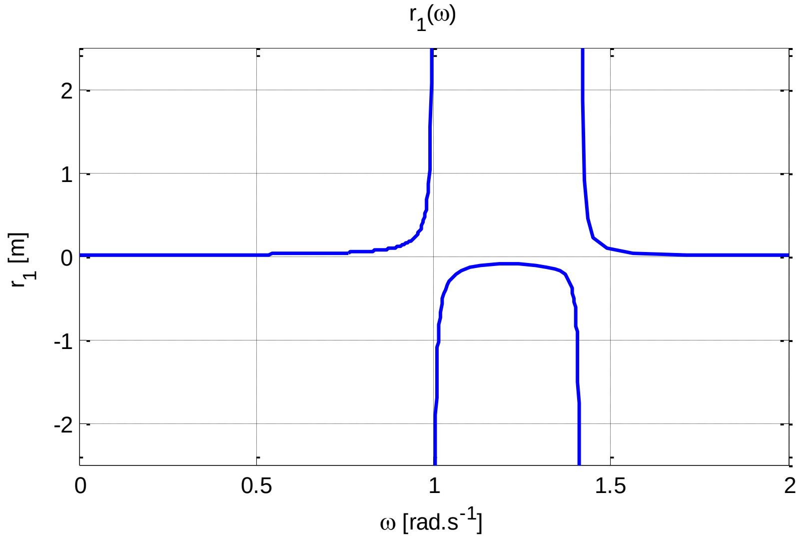
$$r_2(\omega) = \frac{F_2(1.5-\omega^2)}{4(\omega^2-1)(\omega^2-2)} = \frac{0.025(1.5-\omega^2)}{(\omega^2-1)(\omega^2-2)}$$

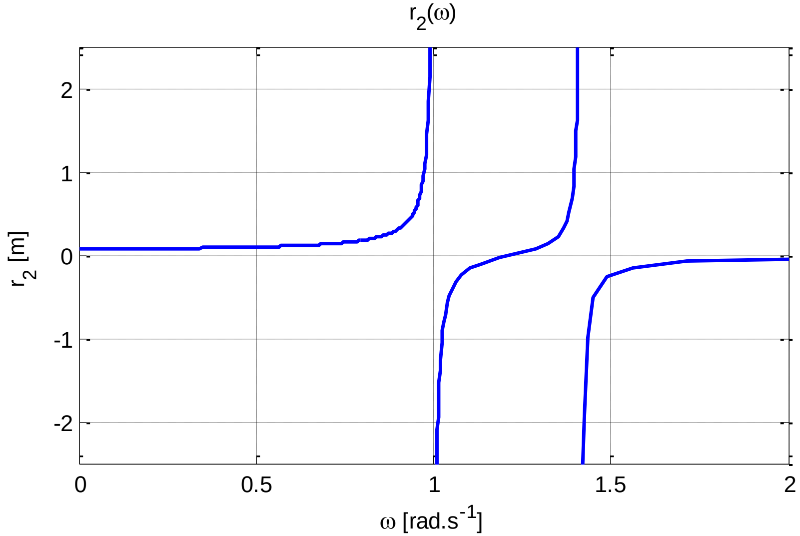
pro ω=1.4rad/s:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 11.9792 & -6.5104 \\ -6.5104 & 2.9948 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 11.9792 & -6.5104 \\ -6.5104 & 2.9948 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6510 \\ 0.2995 \end{bmatrix}$$

$$r_1(\omega = 1.4) = -0.6510\, m$$
$$r_2(\omega = 1.4) = 0.2995\, m$$





Příklad – vynucené kmitání – modální amplitudy

Harmonické buzení pro netlumený systém:

$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{r} = \mathbf{f_0}$

předpoklad:

$\mathbf{r} = \mathbf{Uc}$ ... **c** je modální amplituda (c_i udává intenzitu, s jakou je i-tý vl. tvar zastoupen ve výsledné amplitudě vynucené výchylky)

$(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{Uc} = \mathbf{f_0}$ ... po přenásobení $\mathbf{U}^\mathrm{T}$ zleva

$\left(\mathbf{U}^\mathrm{T}\mathbf{KU} - \omega^2\mathbf{U}^\mathrm{T}\mathbf{MU}\right)\mathbf{c} = \mathbf{U}^\mathrm{T}\mathbf{f_0}$

$(\mathbf{\Lambda} - \omega^2\mathbf{I})\mathbf{c} = \mathbf{U}^\mathrm{T}\mathbf{f_0}$

$\mathbf{c} = (\mathbf{\Lambda} - \omega^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{U}^\mathrm{T}\mathbf{f_0}$ ... jelikož je $(\mathbf{\Lambda} - \omega^2\mathbf{I})$ diagonální, inverze je jednoduchá, na diagonále jsou převrácené hodnoty

$$c_i = \frac{1}{\Omega_i^2 - \omega^2}\mathbf{u}_\mathrm{i}^\mathrm{T}\mathbf{f_0}$$

jelikož platí:

$\mathbf{r} = \mathbf{Uc} = \mathbf{U}(\mathbf{\Lambda} - \omega^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{U}^\mathrm{T}\mathbf{f_0}$

$\mathbf{r} = \mathbf{Gf_0}$

lze psát vztah pro matici dynamické poddajnosti:

$\mathbf{G} = \mathbf{U}(\mathbf{\Lambda} - \omega^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{U}^\mathrm{T}$

Příklad – vynucené kmitání – modální amplitudy

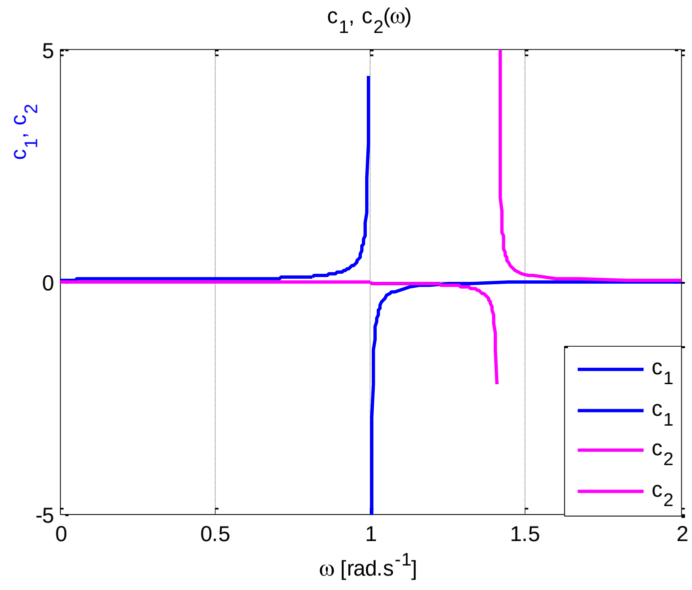
modální amplitudy pro ω=1.4 rad/s:

$$\mathbf{c} = (\boldsymbol{\Lambda} - \omega^2\mathbf{I})^{-1}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{f_0} = \begin{bmatrix} 1-1.4^2 & 0 \\ 0 & 2-1.4^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.3536 \\ 0.7071 & -0.3536 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0368 \\ -0.8839 \end{bmatrix}$$

po prvcích pro různé ω:

$$c_1(\omega) = \frac{1}{\Omega_1^2 - \omega^2}\mathbf{u}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{f_0} = \frac{0.0354}{1-\omega^2}$$

$$c_2(\omega) = \frac{1}{\Omega_2^2 - \omega^2}\mathbf{u}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{f_0} = \frac{-0.0354}{2-\omega^2}$$



Jelikož $\mathbf{r} = \mathbf{Uc}$, lze také psát:

$$\mathbf{r} = \mathbf{u_1}c_1 + \mathbf{u_2}c_2$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.3536 \end{bmatrix}\frac{0.0354}{1-\omega^2} + \begin{bmatrix} 0.7071 \\ -0.3536 \end{bmatrix}\frac{-0.0354}{2-\omega^2} = -0.0368\begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.3536 \end{bmatrix} - 0.8839\begin{bmatrix} 0.7071 \\ -0.3536 \end{bmatrix}$$

kontrola:

$$\mathbf{r} = \mathbf{Uc}$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ 0.3536 & -0.3536 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -0.0368 \\ -0.8839 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.6510 \\ 0.2995 \end{bmatrix}$$

Amplitudy $\mathbf{r}$ vyšly stejně jako přímým výpočtem $\mathbf{r} = \mathbf{Gf_0}$

Příklad – vynucené kmitání a partikulární řešení

netlumený systém buzený silami jedné frekvence:

$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \hat{\mathbf{f}}_{\mathbf{0}} e^{i\omega t}$

odhad partikulárního řešení byl:

$\mathbf{x}_{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{r}} e^{i\omega t}$

v zadání příkladu je kosinové buzení

$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{F}_{\mathbf{c}} \cos \omega t$

$\mathbf{x}_{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{r} \cos \omega t$

$$\mathbf{x}_{\mathbf{P}}(t) = \begin{bmatrix} -0.6510 \\ 0.2995 \end{bmatrix} \cos \omega t$$