PP2 - Castiglianovy věty - přednáška č. 2

- vyjdeme z principu virtuálních prací

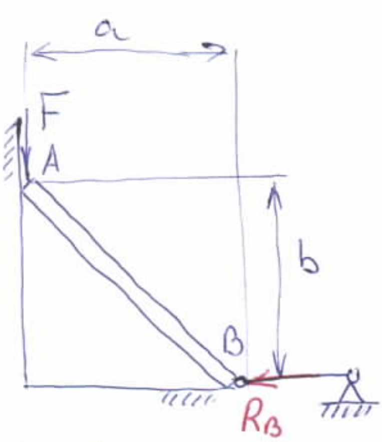
Princip virtuálních prací

a) pro tuhá tělesa - nejobecnější věta mechaniky

- symbol δ má podobný význam jako derivace (jedná se o variaci, tj. nejen ∞ malý přírůstek)

- virtuální posun zobecněné souřadnice δu_i (posun je vždy ve směru, který umožňují vazby)
- vykonaná práce $\delta A = \sum_{i=1}^{n} F_i \, \delta u_i$ → vykonaná na posuvech δu_i
- pro soustavu v rovnováze $\delta A = 0$

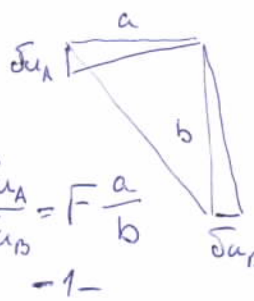
Př.:



Určit reakci v B:

1) virtuální prací:

$$\delta A = F \cdot \delta u_A - R_B \cdot \delta u_B = 0$$

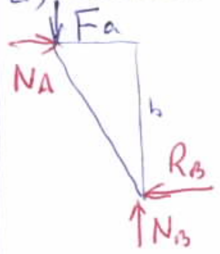


$$\frac{\delta u_A}{a} = \frac{\delta u_B}{b}$$

$$\frac{\delta u_A}{\delta u_B} = \frac{a}{b}$$

$$R_B = F \frac{\delta u_A}{\delta u_B} = F \frac{a}{b}$$

2) uvolněním:



$\uparrow F = N_B$

$\overset{\curvearrowleft}{A}$ $N_B \cdot a - R_B \cdot b = 0$

$R_B = F \frac{a}{b}$

5) pro deformovatelná tělesa : $\delta A \neq 0$, $\delta A = \delta U$

(- již odvozeno : $U = \int \lambda . dV$, tzn. $\delta U = \int \delta \lambda . dV$)

- platí: $\delta A = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta u_i = \delta U$ (1)

- platí: $\delta U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial u_i} \delta u_i$ ... virtuální def. energie (2) „totální diferenciál"

(U je závislé na všech u_i : $U = U(u_i)$)

- z (1) a (2) : $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} F_i \delta u_i}_{\text{virtuální práce}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial u_i} \delta u_i}_{\text{virt. def. energie}} = 0$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(F_i - \frac{\partial U}{\partial u_i}\right) . \delta u_i = 0$$

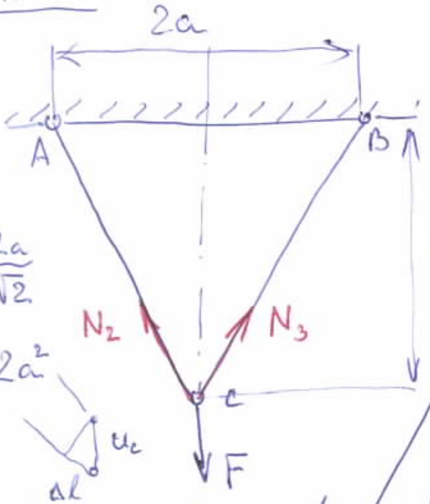
$$\Downarrow$$

$$\boxed{F_i = \frac{\partial U}{\partial u_i}}$$

Lagrangeova věta

(1. Castiglianova věta)

Příklad:



$l = \frac{2a}{\sqrt{2}}$

$l^2 = 2a^2$

$\Delta l = u_c . \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\Delta l^2 = u_c^2 \cdot \frac{1}{2}$

měrná def. ~~práce~~ energie

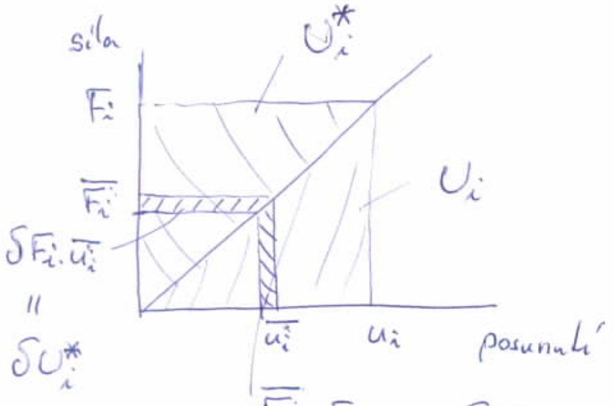
$U = 2 . \lambda . V = 2 . \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \cdot l . S = ES \cancel{l} \frac{\Delta l^2}{l^{\cancel{2}}} =$

$= ES \frac{1}{2} u_c^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2a} = ES \frac{\sqrt{2}}{4a} \cdot u_c^2$

$\frac{\partial U}{\partial u_c} = \frac{1}{2} ES \frac{\sqrt{2}}{a} u_c = F \Rightarrow u_c = \frac{2Fa}{ES\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}\, Fa}{ES}}$

kontr. : $N_2 = N_3$; $F - 2 N_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow N_2 = F \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Delta l = \frac{N_2 . l}{ES} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{F . 2a}{ES\sqrt{2}} = \frac{Fa}{ES}$; $u_c = \frac{2 \Delta l}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}\, Fa}{ES}}$



$$\overline{F_i} . \delta u_i = \delta U_i$$

$$U + U^* = \sum_{i=1}^{n} F_i . u_i$$

$$U^* = \sum_{i=1}^{n} F_i u_i - U$$

virtuální komplementární def. energie

$$\delta U^* = \sum_{i=1}^{n} u_i . \delta F_i + \sum_{i=1}^{n} F_i \delta u_i - \qquad \left(F_i = \frac{\partial U}{\partial u_i} \right)$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial u_i} \delta u_i = \sum_{i=1}^{n} u_i \delta F_i \quad (3)$$

$$U^* = U^*(F_i) = U^*(F_1, F_2, \dots F_n)$$

$$\delta U^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U^*}{\partial F_i} \delta F_i \quad (4)$$

- po dosazení (3) a (4): $\displaystyle \sum_{i=1}^{n} u_i \delta F_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U^*}{\partial F_i} \delta F_i = 0$

$$\sum \left(u_i - \frac{\partial U^*}{\partial F_i} \right) \delta F_i = 0$$

2. Castiglianova věta $\boxed{u_i = \frac{\partial U^*}{\partial F_i}}$

pro lin. závislost σ a ε (Hookeův zákon) $\leftarrow$ $\boxed{u_i = \frac{\partial U}{\partial F_i}}$

- analogicky pro momenty, resp. pootočení: $\displaystyle \delta A = \sum_{i=1}^{n} M_i \delta \varphi_i$

$\vdots$

$$\boxed{\varphi_i = \frac{\partial U}{\partial M_i}}$$

2. Castiglianova věta jinak

- celková práce $A = \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} F_i \cdot u_i$

je rovna deformační energii : $U = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} F_i u_i$

- zderivujme U (parciálně) dle F_j :

$$\frac{\partial U}{\partial F_j} = \frac{\partial A_1}{\partial F_j} + \frac{\partial A_2}{\partial F_j} + \dots + \frac{\partial A_j}{\partial F_j} + \dots \frac{\partial A_n}{\partial F_j}$$

- každý člen se dá napsat : $\frac{\partial A_i}{\partial F_j} = \frac{1}{2} F_i \frac{\partial u_i}{\partial F_j} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial F_i}{\partial F_j}}_{} u_i$

$= 1$ pro $\frac{\partial F_j}{\partial F_j}$ / jinak $= 0$

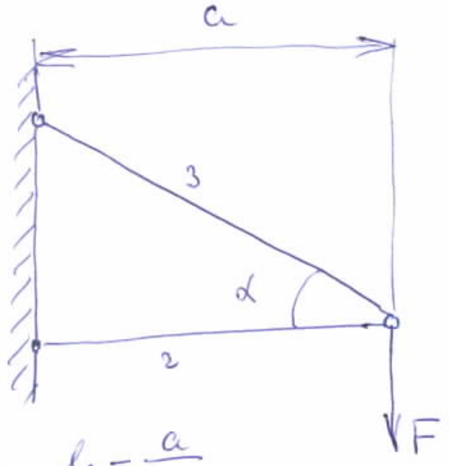
- 1. Castiglianova věta : $F_i = \frac{\partial U}{\partial u_i}$

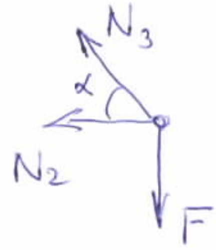
- dosazením

$$\frac{\partial U}{\partial F_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial F_j} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} F_i \frac{\partial u_i}{\partial F_j} + \frac{1}{2} u_j = \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial F_j}}_{\text{parciální derivace složené fce}} + \frac{1}{2} u_j$$

$$\frac{\partial U}{\partial F_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial F_j} + \frac{1}{2} u_j \Rightarrow \boxed{u_j = \frac{\partial U}{\partial F_j}}$$

Příklad:

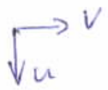




$$N_2 + N_3 \cos\alpha = 0$$

$$N_3 \sin\alpha - F = 0$$

$$N_3 = \frac{F}{\sin\alpha}$$



$$N_2 = -F\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -F\,\frac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$$

$l_2 = a \quad l_3 = \frac{a}{\cos\alpha}$

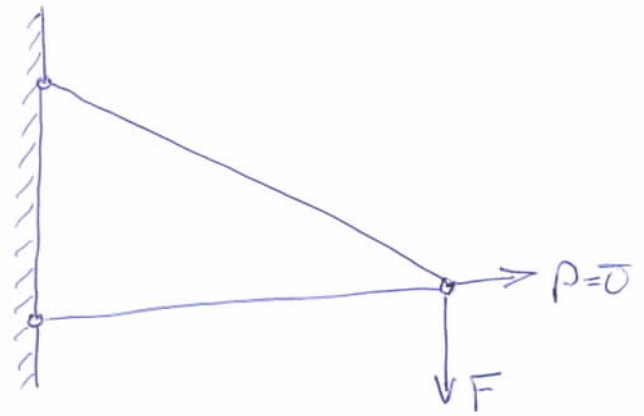
$$U = \frac{N_2^2 l_2}{2ES} + \frac{N_3^2 l_3}{2ES} = \frac{1}{2ES}\cdot\left(\frac{F^2 a}{\mathrm{tg}^2\alpha} + \frac{F^2 a}{\sin^2\alpha \cos\alpha}\right)$$

$$U = \frac{F^2 a}{2ES}\;\frac{\cos^3\alpha + 1}{\sin^2\alpha \cos\alpha}$$

$$u = \frac{\partial U}{\partial F} = \frac{Fa}{ES}\;\frac{\cos^3\alpha + 1}{\sin^2\alpha \cos\alpha}$$

- kontrola: viz přednáška z PP1 č. 3

Jak to bude s posuvem v ?



$$N_2 + N_3 \cos\alpha - P = 0$$

$$N_3 \cdot \sin\alpha - F = 0$$

$$N_3 = \frac{F}{\sin\alpha}$$

$$N_2 = -\frac{F}{\mathrm{tg}\,\alpha} + P$$

$$U = \frac{N_2^2 l_2}{2ES} + \frac{N_3^2 l_3}{2ES} = \frac{1}{2ES}\left(\left(P - \frac{F}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)^2 a + \frac{F^2 a}{\sin^2\alpha \cos\alpha}\right)$$

$$v = \frac{\partial U}{\partial P}\bigg|_{P=0} = \frac{1}{ES}\left(P - \frac{F}{\mathrm{tg}\,\alpha}\right)\cdot a\,\bigg|_{P=0} = -\frac{F \cdot a}{ES\,\mathrm{tg}\,\alpha}$$

Pozn.: Za zavedenou pomocnou nulovou sílu dosazujeme nulovou hodnotu až v samém závěru řešení !

Věta o minimu deformační energie

- k řešení staticky neurčitých úloh

$$U^* = U^*(F_i, R_i)$$

$$\delta U^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U^*}{\partial F_i}\delta F_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U^*}{\partial R_i}\delta R_i = \overbrace{\sum_{i=1}^{n} u_i \delta F_i}^{\delta A^*}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{\partial U^*}{\partial F_i} - u_i\right)}_{=0 \;\ldots\; \text{2. Castiglianova věta}} \delta F_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U^*}{\partial R_i}\delta R_i = 0$$

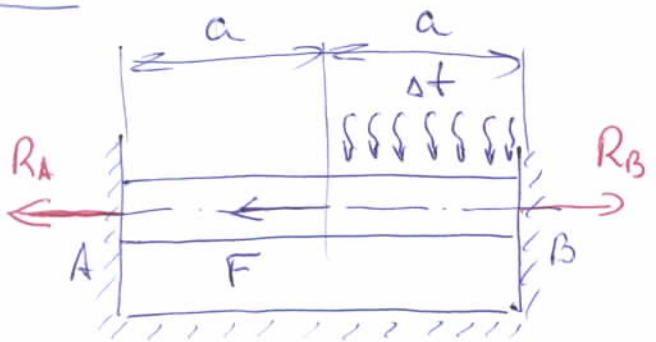
$$\boxed{\frac{\partial U^*}{\partial R_i} = 0}$$

lin. mat.: $\boxed{\frac{\partial U}{\partial R_i} = 0}$

= „staticky neurčitá veličina nabývá takových hodnot, že U je minimální"

Teplotní úloha: $U = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta t_i l_i . N_i$

Příklad:



$$N_1 = R_A \; ; \; N_2 = R_A + F$$

$$U = \frac{N_1^2 a}{2ES} + \frac{N_2^2 a}{2ES} + \alpha \Delta t a N_2 =$$

$$= \frac{R_A^2 . a}{2ES} + \frac{(R_A+F)^2 . a}{2ES} + \alpha . \Delta t . a \, (R_A + F)$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_A} = 0 \Rightarrow 0 = \frac{R_A . a}{ES} + \frac{(R_A+F) a}{ES} + \alpha \Delta t a = \frac{2 R_A}{ES} + \frac{F}{ES} + \alpha \Delta t a$$

$$\boxed{R_A = -\frac{1}{2} \alpha \Delta t a ES - \frac{1}{2} F}$$

kontrola:

$$\Delta_1 + \Delta_2 = 0$$

$$\Delta_1 = \frac{R_A . a}{ES} \qquad \Delta_2 = \frac{(R_A+F) . a}{ES} + \alpha \Delta t a$$

$$\underbrace{\frac{R_A . a}{ES} + \frac{(R_A+F) . a}{ES} + \alpha \Delta t a = 0}$$