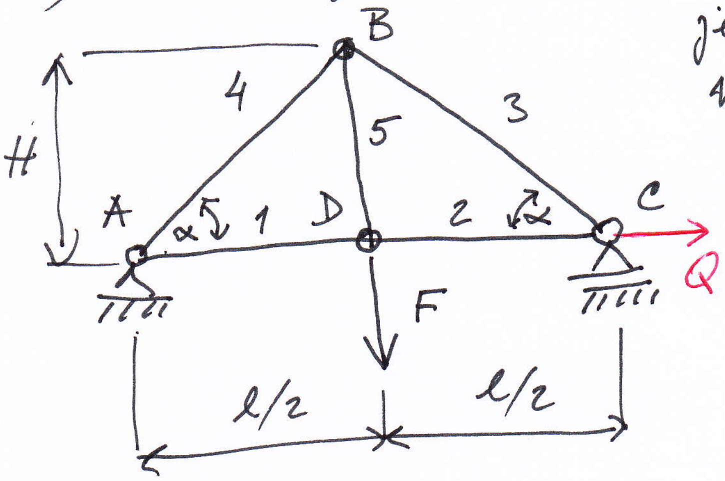
# Castiglianovy věty a prutové soustavy

## 1) Staticky určitá prutová soustava




je zatížená silou F, máme určit vodorovný posuv bodu C a svislý posuv bodu D.

Podle Castiglianovy věty

$$w_D = \frac{\partial U}{\partial F}$$

Pro výpočet vodorovného posuvu bodu C připojíme fiktivní sílu Q

$$u_C = \left.\frac{\partial U}{\partial Q}\right|_{Q=0}$$

Deformační energie $U = \sum_{i=1}^{5} \frac{N_i^2 l_i}{2E_i S_i}$

Síly v prutech $N_i = f(F, Q, \dots)$

$$w_D = \frac{\partial U}{\partial F} = \sum_1^5 \frac{N_i l_i}{E_i S_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F}, \quad u_C = \left.\frac{\partial U}{\partial Q}\right|_{Q=0} = \left.\sum_1^5 \frac{N_i l_i}{E_i S_i} \frac{\partial N_i}{\partial Q}\right|_{Q=0}$$

Síly v prutech:

| $i$ | $N_i$ | $\partial N_i/\partial F$ | $\partial N_i/\partial Q$ | $l_i$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $Q + F/(2\,tg\alpha)$ | $1/(2\,tg\alpha)$ | 1 | $l/2$ |
| 2 | $Q + F/(2\,tg\alpha)$ | $1/(2\,tg\alpha)$ | 1 | $l/2$ |
| 3 | $-F/(2\sin\alpha)$ | $-1/(2\sin\alpha)$ | 0 | $l/(2\cos\alpha)$ |
| 4 | $-F/(2\sin\alpha)$ | $-1/(2\sin\alpha)$ | 0 | $l/(2\cos\alpha)$ |
| 5 | $F$ | 1 | 0 | $l/2 \cdot tg\alpha$ |

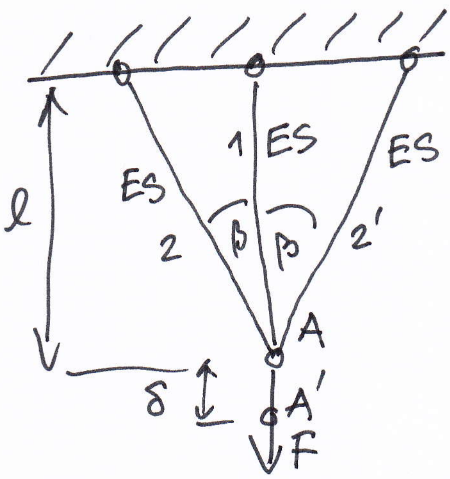
$$w_D = 2\cdot\frac{F}{(2\,tg\alpha)^2}\cdot\frac{l/2}{ES} + 2\frac{F}{(2\sin\alpha)^2}\cdot\frac{l/(2\cos\alpha)}{ES} + \frac{F\cdot\frac{l}{2}\cdot tg\alpha}{ES}$$

$$u_C = 2\,\frac{F}{2\,tg\alpha}\,\frac{l/2}{ES}$$

Pozn.: V případě lineární konstrukce je $U^* = U$ a $U^*$ můžeme vyjádřit jako kvadrat. fci zatížení

$$\delta = \frac{\partial U}{\partial F}$$

2) Staticky neurčitá prutová soustava

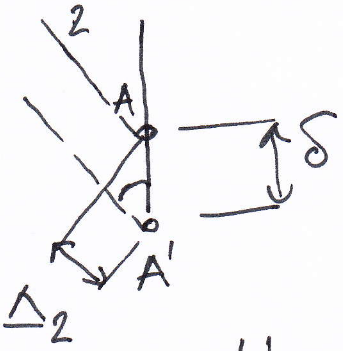



δ = posun bodu A = prodloužení prutu 1 = $\Delta_1$

$$\frac{\partial U}{\partial \delta} = F \quad \text{(první castigl. věta)}$$

$$\Delta_2 = \delta\cdot\cos\beta$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\delta}{l} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\delta\cdot\cos\beta}{l/\cos\beta}$$




$$\lambda_1 = \frac{1}{2}E\cdot\varepsilon_1^2 \;;\; \lambda_2 = \frac{1}{2}E\cdot\varepsilon_2^2$$

$$U_1 = \lambda_1\cdot S l \;;\; U_2 = \lambda_2\cdot S\frac{l}{\cos\beta}$$

$$U = U_1 + 2U_2 = \frac{1}{2}ESl\cdot\left(\frac{\delta}{l}\right)^2\cdot(1+2\cos^3\beta)$$

$$F = \frac{\partial U}{\partial \delta} = \frac{ES}{l}(1+2\cos^3\beta)\cdot\delta \Rightarrow \delta = \frac{Fl}{ES(1+2\cos^3\beta)}$$

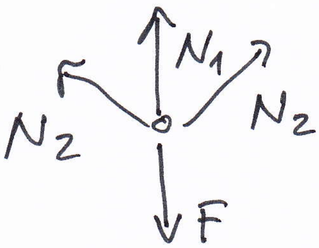
$$\Delta_1 = \frac{N_1\cdot l}{ES} = \delta \Rightarrow N_1 = \frac{F}{1+2\cos^3\beta}\;,\; N_2 = \frac{F\cdot\cos^2\beta}{1+2\cos^3\beta}$$

nebo s použitím druhé Castigl. věty pro lineární soustavu $U^* = U$

$$\frac{\partial U}{\partial X} = 0,$$ kde $X$ je staticky neurčitá síla

zvolme $X = N_1$ = síla v prostředním prutu

$$\frac{\partial U}{\partial N_1} = 0$$




$$U = \sum_{i=1}^{3} \frac{N_i^2 l_i}{2 E_i S_i}$$

$$\frac{\partial U}{\partial N_1} = \sum_{1}^{3} \frac{N_i l_i}{E_i S_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial N_1} = 0$$

| $i$ | $N_i$ | $\frac{\partial N_i}{\partial N_1}$ | $l_i$ |
|---|---|---|---|
| 1 | $N_1$ | 1 | $l$ |
| 2 | $\frac{F-N_1}{2\cos\beta}$ | $-\frac{1}{2\cos\beta}$ | $\frac{l}{\cos\beta}$ |

$$\frac{N_1 l}{ES} + 2\,\frac{F-N_1}{(2\cos\beta)^2} \cdot \frac{l}{\cos\beta} \cdot \frac{1}{ES} = 0$$

$$N_1 = \frac{F}{1+2\cos^3\beta}$$